*Thomas Bedürftig*

Gedächtnisprotokoll
*mit kleinen Ergänzungen, drei Fußnoten und einem Schluss*

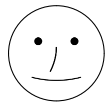
# Was ist ein Punkt? – Interview am 8.4.2015

## 1. Künstlerisch

In der Kunst – im weitesten Sinne – gibt es keine Probleme mit dem Punkt. Praktisch, beim Malen und Zeichnen, ist klar, was ein Punkt ist:

> Ein Punkt ist ein Farbflecken oder eine Bleistiftspur auf einem Blatt Papier.

Jeder kennt das folgende Beispiel eines „Kunstwerkes“:



*„Punkt, Punkt, Komma, Strich, fertig ist das Mondgesicht.“*

Punkte in der Kunst haben, wenn die Kunst nicht ganz und gar abstrakt ist, eine Bedeutung:

> Punkte sind Bildelemente, die äußere, reale Erscheinungen abbilden oder bedeuten.

Wir malen, zeichnen, *setzen* einen Punkt auf ein Papier, um etwas darzustellen.

- Punkte sind Bilder oder Zeichen für Gegenstände im realen Raum

– im obigen Bild Zeichen für Augen.

## 2. Technisch

Auch hier gibt es kein Problem mit dem, was ein Punkt ist. Es ist wie beim „künstlerischen“ Zeichnen, nur geht es zusätzlich um Genauigkeit – z. B. beim Zeichnen von Landkarten, Bauplänen etc. Die Genauigkeit des Zeichnens und der Punkte richtet sich nach den Ansprüchen und den äußeren technischen Möglichkeiten. Im Prinzip gilt wieder:

> Ein Punkt ist eine Bleistift- oder Tonerspur auf einem Blatt Papier oder ein Pixel auf dem Bildschirm.

Auch hier haben Punkte eine reale Bedeutung.

> Punkte bilden reale Positionen im Raum ab oder bezeichnen in Plänen Orte, die real werden sollen.

Wir setzen einen Punkt in eine technische Zeichnung, um einen Ort im realen Raum zu bezeichnen.

- Punkte sind Zeichen für Positionen im realen Raum.

## 3. Geometrisch

Jetzt wird es schwieriger. Geometrie ist eine sehr alte *mathematische* Disziplin, die die alten Griechen begründeten. In der Geometrie zeichnen wir zwar konkret Punkte wie in 1. und 2., aber Punkte sollen nicht die Bleistiftspuren oder die Farbkleckse sein. Man „idealisiert“, man *denkt* sich etwas „Ideales“ dahinter:

Geometrisch geht es um „idealisierte“ oder „ideale“ Punkte.

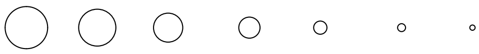
Was ist ein idealisierter, ein idealer Punkt? Punkte oben waren nie ganz genau.

Sind ideale Punkte die „ganz genauen Punkte“?

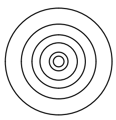
Was könnte das sein? Versuchen wir einmal, genau zu werden – und fangen, um das Prinzip „genauer werden“ zu verstehen, ganz ungenau an:

Wir nehmen die Bleistiftmaterie weg, so:

damit wir sehen können, wie wir immer genauer werden:



Oder besser so – noch etwas vergrößert:



Jetzt müssen wir unterscheiden:

a) Geht dieses Feinerwerden ohne Ende immer weiter?

   Dann gibt es den idealen Punkt gar nicht!

b) Oder können wir uns doch ein Ende vorstellen?

   Was ist dann das Ende?

   Ein Punkt? Ein idealer Punkt ist ein Punkt? Das ist keine Antwort. Wir wissen ja nicht, was ein Punkt ist.

c) Was könnte dann das Ende sein?

   Wir befinden uns geometrisch in einer Ebene. Es könnte ein winziges Stück der Ebene sein.

   Wie groß wäre dieses Stück? Durchmesser 0!

   Gibt es etwas der Größe Null, etwas ohne Ausdehnung? Nein!

   Der ideale Punkt wäre nichts.

d) Noch einmal: Wir befinden uns geometrisch in einer Ebene. Der ideale Punkt könnte ein winziges Stück der Ebene sein.

Der Durchmesser könnte unendlich klein sein, aber $\neq 0$.[1]

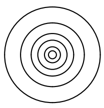
Der ideale Punkt wäre ein unendlich kleines Stück Fläche.

Problem gelöst? Oder doch nicht?

e) Auch wenn die Fläche unendlich klein ist, sie ist eine Fläche. In Flächen kann man Punkte setzen oder gesetzt denken:

- In die unendlich kleine Fläche, die der ideale Punkt ist, – nennen wir sie $A$ – kann man einen Punkt setzen und den idealen Punkt denken.
- Dieser ideale Punkt ist eine – in Relation zu $A$ – unendlich kleine Fläche $B$.
- In diese unendlich kleine Fläche $B$ kann man einen Punkt setzen und den idealen Punkt denken.
- Dieser Punkt ist eine – in Relation zu $B$ – unendlich kleine Fläche $C$.
- In diese unendlich kleine Fläche $C$ kann man einen Punkt setzen und den idealen Punkt denken.
- … …

Wir sind im Prinzip zu a) zurückgekehrt – absteigend ins Infinitesimale, ohne Ende:



## 4. Geometrisch – von vorn

Wir müssen noch einmal von vorn beginnen – und etwas beachten, was wir oben schon hervorgehoben haben. Beim Malen und Zeichnen bedeuten oder *bezeichnen* Punkte etwas Äußeres, Reales im Raum.

Alles Äußere aber ist jetzt geometrisch geworden und Element der Geometrie. Der reale Raum wird der geometrische Raum, das Blatt Papier wird zur Ebene, der Strich zur Linie oder Geraden usw. Wenn wir geometrisch arbeiten, setzen wir konkret Punkte wie zuvor, nicht aber um etwas Äußeres, Reales, sondern etwas innerhalb der Geometrie zu *bezeichnen*. Die Genauigkeit beim Zeichnen verliert ihre Relevanz. Es geht nicht mehr um den „ganz genauen“ Punkt.

Ein Punkt ist ein *Zeichen* für etwas in der Geometrie. Wir beschränken uns jetzt und beobachten, wie wir Punkte auf *Geraden* setzen. Das ist der häufigste Fall. Man setzt z. B. Punkte, um Zahlen auf der Geraden zu veranschaulichen.

Der Punkt, den wir setzen und denken, bezeichnet etwas auf der Geraden.
*Was* bezeichnet er?

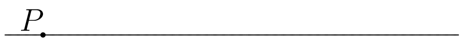
Außer der Geraden ist nichts da. Nennen wir es eine „Stelle“ auf der Geraden.

Wir gewinnen eine neue Position dem Punkt gegenüber.

- Ein Punkt ist ein *Zeichen* – für eine Stelle auf der Geraden:

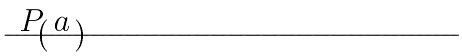
[1]Unendlich Kleines, Infinitesimales ist seit 50 Jahren mathematisch legitimiert. Ich mache diese Fußnote, weil das nicht überall bekannt ist.

Wir nennen den Punkt $P$:



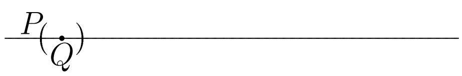

Was ist die Stelle auf der Geraden, die $P$ bezeichnet?

Eine Stelle, nennen wir sie $a$, kann nur etwas *von* der Geraden sein, etwas Gerade, ein kleiner, vielleicht unendlich kleiner Teil der Geraden. Etwa so – sehr vergrößert, innerhalb der Klammern:

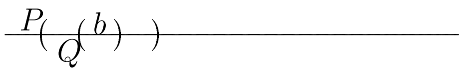



Haben wir das Problem nicht nur in die Frage nach den Stellen verschoben? Es scheint so. Wir kommen in den gleichen unendlichen Regress hinein wie eben. So:

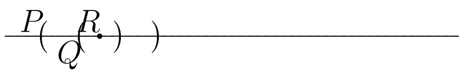
In den kleinen Teil $a$ der Geraden können wir wieder einen Punkt $Q$ setzen,




der in diesem Teil eine Stelle $b$, also einen (unendlich) kleinen Teil bezeichnet.




In diesen kleinen Teil $b$ der Geraden können wir wieder einen Punkt $R$ setzen,




der in diesem Teil eine Stelle $c$, also einen unendlich kleinen Teil bezeichnet usw. usf. … … …

Ohne Ende! Also: Wir wissen genauso nicht, was eine Stelle ist, wie wir nicht wussten, was ein Punkt ist. Und sind kein Stück weiter?

Doch:
Wir wissen jetzt, dass ein Punkt ein *Zeichen* ist. Aber wir wissen nicht wofür. Und können es offenbar nicht wissen. Aber wir können etwas tun!

## 5. Philosophisch

Wir hatten bemerkt:

Der Punkt ist ein Zeichen.

Zeichen werden gesetzt. Wer setzt den Punkt?

Wir.

Wir bemerken: Liegt die Gerade vor uns, so ist kein Punkt zu sehen – auch nicht irgendwie darin verborgen.[2] Der geometrische Punkt entsteht – wie der konkrete Punkt – erst dadurch, dass wir ihn setzen.

> Aristoteles hat den Punkt als das Nicht-Kontinuum, das Gegenüber zum Kontinuum charakterisiert.
>
> Wir bemerken jetzt, dass wir es sind, die den Punkt setzen.
>
> Nicht der Punkt, vielmehr der *Gedanke*, der ihn setzt, ist das *Gegenüber* zum Kontinuum.

*Das ist der Schlüssel für das Problem des Punktes.*

Den Prozess, den wir oben im Punkt 4. sahen, können wir unterbrechen. Wir können sagen: Schluss – und z.B oben bei P, oder Q oder R usw. Halt machen.

Euklid hatte gesagt:

> *σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.*
>
> Ein Punkt ist, was keine Teile hat.

Wir können jetzt sagen:

- Ein Punkt ist ein Zeichen für eine *Stelle*, die keine Teile haben *soll.*

Da wir gewöhnlich Punkt und Stelle nicht unterscheiden, wird daraus die etwas seltsame Formulierung:

- Ein Punkt ist ein Zeichen für einen Punkt, der keine Teile haben *soll.*

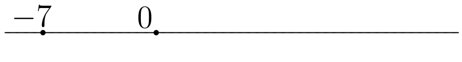
Das bedeutet kurz:

- Ein Punkt ist, was keine Teile *habe*!

Den *Indikativ*, die Feststellung bei Euklid, interpretieren wir als *Imperativ.*

## 6. Mathematisch

Schon immer haben Mathematiker Zahlen als Punkte auf einer Geraden veranschaulicht. Die Zahlen wurden zu Namen der Punkte, die Stellen auf der Geraden bezeichnen. Man sagte nicht mehr $P$, sondern 0 oder $-7$ oder Ähnliches.




Diese Stellen veranschaulichten umgekehrt die Zahlen – im Verhältnis zu weiteren Zahlen, die man ebenso darstellte oder sich so dargestellt vorstellte.

Historisch ist dies passiert:

> Vor 150 Jahren wurden die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ konstruiert.
>
> Die reellen Zahlen wurden auf die Gerade gesetzt.

[2]Wir wissen heute, dass eine Gerade, das lineare Kontinuum, keine Menge von Punkten ist, die mit Zahlen identifiziert sind.

> Man hielt die Gerade mit reellen Zahlen für *besetzt*. Für andere Punkte war kein Platz mehr.
>
> Reelle *Zahlen* und geometrische *Punkte* auf der Geraden wurden *identifiziert*.
>
> Die *Zahlengerade* war erfunden.
>
> Dass ein reeller Punkt „nur“ eine *Stelle*, also ein lineares Kontinuum im linearen Kontinuum, *bezeichnete*, konnte und wollte man sich nicht vorstellen.
>
> Überabzählbar viele Punkte lagen jetzt vor, durch reelle Zahlen bezeichnet, und *waren* die Gerade.

Jeder, der das Kontinuum für etwas anderes und mehr hielt als $\mathbb{R}$, wurde als Mystiker beschimpft – z. B. von Cantor.

Vor 150 Jahren wurde „reelle Zahl“ der Gedanke, mit dem Mathematiker Punkte auf die Gerade setzen. Seit gut 50 Jahren kennt man die hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$ und höhere nicht-archimedische Erweiterungen von $\mathbb{R}$. Die neuen Zahlen haben Platz genommen auf der Geraden – unendlich nah – in „Monaden“ um die reellen Punkte herum.

Nun, man kann bei den reellen Zahlen und Punkten in der Tat Halt machen. Man muss es heute aber *bewusst* tun. Bewusst heißt:

> Wenn man bei den reellen Punkten Halt macht (sie bezeichnen *Stellen*, die keine Teile haben *sollen*), dann hat man die reelle Zahlengerade.

Und man weiß, dass es weitergeht:

> Wenn man bei den hyperreellen Punkten Halt macht (sie bezeichnen Stellen, die keine Teile haben *sollen*), dann hat man die hyperreelle Zahlengerade.
>
> Wenn man bei den hyperhyperreellen Punkten Halt macht (sie bezeichnen Stellen, die keine Teile haben *sollen*), dann hat man die hyperhyperreelle Zahlengerade.
>
> Usw. usf.

Es gibt beliebig viele unterschiedliche arithmetische *Modelle* der Geraden. Keines füllt die Gerade aus.

Zur Zeit geht man über die hyperreellen Zahlen und Punkte selten hinaus.

Wir bemerken und halten fest:

> Erfassen durch Punkte kann man die Gerade nicht.
>
> Das Kontinuum besteht nicht aus Punkten. Aristoteles und Leibniz hatten recht.

## Schluss

Wir versuchen eine Antwort auf die Titelfrage des Interviews zu geben und runden die Argumentationen ab.

- Ein Punkt ist ein offener Prozess von Stellen im Kontinuum. Eine Stelle im Prozess wird festgelegt als Punkt, der keine Teile haben soll.

- Dies geschieht mathematisch in einer arithmetischen Korrespondenz, in der Zahlen eines fest gewählten Zahlenbereichs Punkte auf einer Geraden bezeichnen und umgekehrt durch diese Punkte dargestellt werden.
- Die bezeichnete Stelle hat in dem gewählten Zahlenbereich die Größe 0, ist also „ausdehnungslos".[3]

Wir haben gegen Ende des Interviews den Punkt als *Zeichen* charakterisiert, das wir setzen, um etwas zu bezeichnen. Dies ist die angemessene Sichtweise, wenn man an die Korrespondenz zwischen Zahlen und Punkten auf einer Geraden denkt. Der *Gedanke*, der den Punkt setzt, ist dabei repräsentiert durch eine Zahl eines gewählten Zahlenbereichs. Heute noch geht man in der Regel davon aus, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ der „richtige" Zahlenbereich ist und neben den „reellen Punkten" kein Platz mehr ist. Wir haben dem eben widersprochen.

Wenn man nach der vollen Bedeutung des Punktes fragt, müssen wir zurückgehen zum künstlerischen und technischen Anfang. Auch dort hatte der Punkt den Charakter des Zeichens, das wir setzen. Er spielte aber noch eine andere Rolle. Ein Punkt war das *Abbild* eines realen Phänomens. Der Punkt als Zeichen bezeichnet etwas Reales. Umgekehrt bringt etwas Reales den Punkt als sein Abbild ins Bild.

Ein Problem entsteht wieder im Übergang zur Geometrie. Dem Übergang liegt eine Abstraktion zugrunde. Die Grundelemente der Geometrie, Ebene, Gerade und Punkt, stammen, knapp gesagt, von den Flächen, Kanten und Ecken realer Körper ab. Hier ist der Ursprung des Punktes nicht der Gedanke, der ihn setzt, sondern ein reales Phänomen. Er existiert quasi, ohne dass wir ihn setzen – und spielt doch wieder eine Sonderrolle. Er ist sozusagen der „Endpunkt" in der Reihe der geometrischen Grundelemente. Dies finden wir so bei Aristoteles vor und gedanklich auch bei Euklid, dort nur in umgekehrter Reihenfolge aufgeschrieben.

a) Körper werden von Flächen begrenzt, Flächen von Linien, Strecken von Punkten. Und Punkte?

b) Die anderen Grundelemente haben Teile. Was ist der Teil eines Punktes?

Euklid sagt in seiner 1. Definition „Nichts" (*οὐϑέν*). Der Punkt ist das *Nichtkontinuum* – und war und ist der Schlüssel zum Verständnis des Kontinuums. Euklid setzte ihn an den Anfang der Mathematik. Heute ist er das universelle Element der Mathematik – in der Vorstellung.

Man hat 100 Jahre geglaubt, den Punkt als reelle Zahl „eingefangen" zu haben. Und man glaubt es auch heute noch gern. Wir haben gezeigt, dass dies ein Aberglauben ist. Wir wissen, dass die reelle Zahl nur ein Modell für den Punkt ist – in einem offenen Prozess von Modellen. Dies sagt das Ende des letzten Punktes und bedeutet die Antwort auf die Frage „Was ist ein Punkt?", die wir zu Beginn dieses Schlusses gegeben haben.

[3] Diese Fortsetzung der Gedanken über den Punkt geht auf eine Aussage von Karl Kuhlemann zurück.