Nichtstandard-Analysis

Rechnen mit „divergenten“ und „bedingt konvergenten“ Reihen

Simmern, April 2018
Karl Kuhlemann

Leibniz Universität Hannover

Agenda

- Gedanken zum aktual Unendlichen
- Rechnen mit „divergenten“ Reihen
- Umordnung „bedingt konvergenter“ Reihen

Agenda

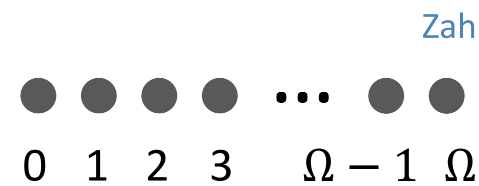
- Gedanken zum aktual Unendlichen
- Rechnen mit „divergenten“ Reihen
- Umordnung „bedingt konvergenter“ Reihen

Wie kann man das aktual Unendliche in der Analysis denken?

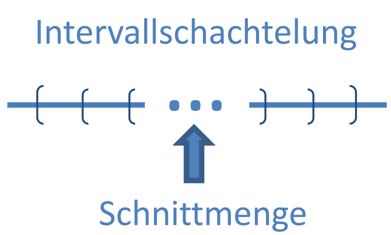
Offen, unbegrenzt

Abgeschlossen, begrenzt

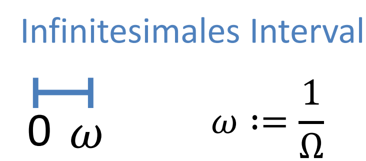
Zählen



Kontinuum,
unendlich groß



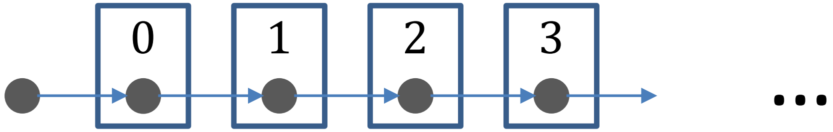
Kontinuum,
unendlich klein



$\omega := \frac{1}{\Omega}$

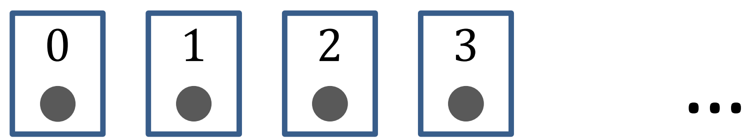
Zwei unendliche Hotels

Hilberts Hotel



Zwei unendliche Hotels

Hilberts Hotel

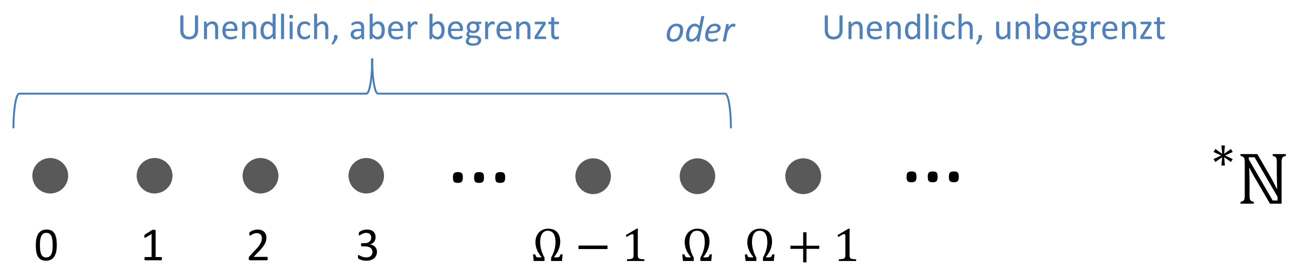


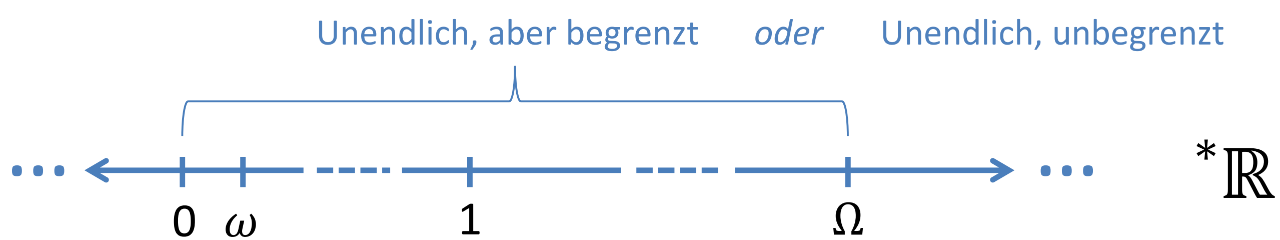
„unendlich = unendlich + 1“

Robinsons Hotel

„unendlich < unendlich + 1“

Nichtstandard kann beides





Standard versus Nichtstandard

- Die Standardanalysis verwendet das „unbegrenzte Unendlich“ für Grenzprozesse.
- Die Nichtstandard-Analysis verwendet typischerweise das „begrenzte Unendlich“,
  - z. B. hyperendliche Summen statt unendlicher Reihen.
- Hierdurch entfallen Beschränkungen der Standardanalysis bzgl.
  - des Rechnens mit divergenten Reihen,
  - der Umordnung bedingt konvergenter Reihen.

Agenda

- Gedanken zum aktual Unendlichen
- Rechnen mit „divergenten“ Reihen
- Umordnung „bedingt konvergenter“ Reihen

Rechnen mit „divergenten“ Reihen

Ein Beispiel nach Johann Bernoulli

$$\sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n}\right) - \left(\sum_{n=2}^{\Omega+1} \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{\Omega+1} \approx 1$$

Infinite Summenwerte

Ergebnis in Standardlesart: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Agenda

- Gedanken zum aktual Unendlichen
- Rechnen mit „divergenten“ Reihen
- Umordnung „bedingt konvergenter“ Reihen

Absolute und bedingte Konvergenz von Reihen

Definition:

- Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
- Eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe heißt *bedingt konvergent*.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ist bedingt konvergent, denn die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

Satz:

- Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz, aber nicht umgekehrt.
- Hat eine absolut konvergente Reihe den Grenzwert a, dann konvergiert auch jede Umordnung der Reihe gegen a. Für bedingt konvergente Reihen gilt dies nicht.

Umordnung führt zu „Unordnung“

Alternierende harmonische Reihe*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$$

Beweis folgt.

Umordnung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{3}{2} \log 2$$

*Wert folgt aus der Potenzreihenentwicklung $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^{k-1}}{k}$

Noch einmal ausführlicher

Alternierende harmonische Reihe:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\pm\cdots=\log 2$$

Einmal +, einmal -

Umordnung:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\pm\cdots=\frac{3}{2}\log 2$$

Zweimal +, einmal -

Wir rechnen mit Euler …

Euler-Mascheroni-Konstante

Zur expliziten Berechnung der umgeordneten alternierenden harmonischen Reihe wird folgendes Ergebnis von Euler benötigt:

Sei $C_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$. Dann konvergiert die Folge (C_n).

$C := \lim\limits_{n \to \infty} C_n = 0{,}577 \ldots$ heißt *Euler-Mascheroni-Konstante*.

Berechnung der umgeordneten Reihe

$$
\begin{aligned}
S(n) &:= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \\
&\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} + \frac{1}{4k} \right) \\
&- \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k} \right) \\
&- \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}
\end{aligned}
$$

Berechnung der umgeordneten Reihe

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{k}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k} \right)$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$$

Berechnung der umgeordneten Reihe

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{k}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}\right)$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$$

Berechnung der umgeordneten Reihe

$$S(n) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{k}$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$$

Berechnung der umgeordneten Reihe

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{k}$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$C_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

Berechnung der umgeordneten Reihe

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) =$$

$$C_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

$$\log(4n) + C_{4n}$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Berechnung der umgeordneten Reihe

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) =$$

$$C_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

$$\log(4n) + C_{4n}$$

$$-\frac{1}{2}(\log(2n) + C_{2n})$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Berechnung der umgeordneten Reihe

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) =$$

$$C_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

$$\begin{aligned} &\log(4n) + C_{4n} \\ &- \frac{1}{2}(\log(2n) + C_{2n}) \\ &- \frac{1}{2}(\log(n) + C_n) \end{aligned}$$

Berechnung der umgeordneten Reihe

$$S(n) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) =$$

$$\log(4n) + C_{4n} - \frac{1}{2}(\log(2n) + C_{2n}) - \frac{1}{2}(\log(n) + C_n) =$$

$$\log(4n) - \log(2n) + \frac{1}{2}\log(2n) - \frac{1}{2}\log n + C_{4n} - \frac{1}{2}C_{2n} - \frac{1}{2}C_n =$$

$$\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 + \underbrace{C_{4n} - \frac{1}{2}C_{2n} - \frac{1}{2}C_n}_{\to C - \frac{C}{2} - \frac{C}{2} = 0} \quad \to \frac{3}{2}\log 2$$

Kommutativ oder nicht?

- In der Nichtstandard-Analysis werden unendliche Reihen als Standardteil hyperendlicher Summen berechnet.
- Hyperendliche Summen dürfen ohne Einschränkung beliebig umsortiert werden (allgemeine Kommuntativität).
- Wie passt dies mit dem Ergebnis der Standardanalysis zusammen?
- Dies diskutieren wir am Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe.

Nichtstandard-Deutung

Alternierende harmonische Summe:

$$A(\Omega) := \sum_{k=1}^{4\Omega} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \approx \log 2$$

Andererseits ist

$$S(\Omega) = \sum_{k=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) \approx \frac{3}{2} \log 2$$

Dies ist *keine* Umordnung der oberen Summe, weil unendlich viele negative Summanden fehlen.

Ermittlung der fehlenden Summanden

$$\mathrm{A}(\Omega) = \sum_{k=1}^{4\Omega} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) - \sum_{k=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k} \right) + \sum_{k=1}^{\Omega} \frac{1}{2k}$$

Ermittlung der fehlenden Summanden

$$\mathrm{A}(\Omega) = \sum_{k=1}^{4\Omega} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} \right)$$

$$= S(\Omega) \quad - \sum_{k=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k} \right) + \sum_{k=1}^{\Omega} \frac{1}{2k}$$

Ermittlung der fehlenden Summanden

$$A(\Omega) = \sum_{k=1}^{4\Omega} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} \right)$$

$$= S(\Omega) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \right) + \sum_{k=1}^{\Omega} \frac{1}{2k}$$

Ermittlung der fehlenden Summanden

$$\mathrm{A}(\Omega) = \sum_{k=1}^{4\Omega} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} \right)$$

$$= S(\Omega) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2\Omega} \frac{1}{k} \qquad\qquad + \sum_{k=1}^{\Omega} \frac{1}{2k}$$

Ermittlung der fehlenden Summanden

$$\mathrm{A}(\Omega) = \sum_{k=1}^{4\Omega} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} \right)$$

$$= S(\Omega) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2\Omega} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\Omega} \frac{1}{k}$$

Ermittlung der fehlenden Summanden

$$\mathrm{A}(\Omega) = \sum_{k=1}^{4\Omega} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} \right)$$

$$= S(\Omega) - \frac{1}{2} \sum_{k=\Omega+1}^{2\Omega} \frac{1}{k}$$

Ermittlung der fehlenden Summanden

$$A(\Omega) = \sum_{k=1}^{4\Omega} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} \right)$$

$$= S(\Omega) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\Omega} \frac{1}{\Omega + k}$$

Diese Summanden fehlen bei S(Ω)

Wieviel machen die fehlenden Summanden aus?

Mit $dx := \frac{1}{\Omega}$ ist

$$\sum_{k=1}^{\Omega} \frac{1}{\Omega + k} = \sum_{k=1}^{\Omega} \frac{dx}{1 + k\ dx} \approx \int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx = \log 2$$

Also ist

$$A(\Omega) \approx S(\Omega) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\Omega} \frac{1}{\Omega + k} \approx S(\Omega) - \frac{1}{2} \log 2$$

in Übereinstimmung mit $A(\Omega) \approx \log 2$ und $S(\Omega) \approx \frac{3}{2} \log 2$