

# Inhaltsverzeichnis

*Karl Kuhlemann*

Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische  
Rechtfertigung 1



# Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung

Karl Kuhlemann

*[...] sie [die Leser] werden aber bemerken, was für ein großes Feld des Entdeckens offen steht, sobald sie dieses Eine richtig begriffen haben, dass jede krummlinige Figur nichts anderes als ein Polygon mit unendlich vielen, der Größe nach unendlich kleinen Seiten ist.<sup>1</sup>*

## 1 Motivation

In seiner *Quadratura* von 1676 preist Leibniz die Fruchtbarkeit des Gebrauchs unendlicher und unendlich kleiner Größen in der Analysis, die er zumindest als nützliche Fiktionen anerkennt.

Und es kommt nicht darauf an, ob es derartige Quantitäten in der Natur der Dinge gibt, denn es reicht aus, sie durch eine Fiktion einzuführen, da sie Abkürzungen des Redens und Denkens und daher des Entdeckens ebenso wie des Beweisens liefern, so dass es nicht immer notwendig ist, Einbeschriebenes oder Umbeschriebenes zu benutzen und *ad absurdum* zu führen, und zu zeigen, dass der Fehler kleiner als ein beliebiger zuweisbarer ist. [...] Wenn sich also im folgenden jemand über den Gebrauch dieser Quantitäten beklagen wird, wird er sich entweder als ein Unkundiger oder Undankbarer zeigen. Als ein Unkundiger eben, wenn er nicht versteht, was für ein großes Licht hier in der ganzen Indivisibelnmethode und auf dem Gebiet der Quadraturen angezündet wird; als ein Undankbarer aber, wenn er den Nutzen, den er bekommt, verheimlicht.<sup>2</sup>

---

1. Siehe Leibniz 2016, Seite 131.

2. Siehe Leibniz 2016, Seite 129.

Welcher Status diesen Fiktionen bei Leibniz zukommt, ist in der Fachliteratur vielfach diskutiert worden.<sup>3</sup> Im Kern geht es um die Frage, ob der Gebrauch von Infinitesimalien für Leibniz *nur* eine (gegenüber der Exhaustionsmethode) abkürzende Redeweise ist – und Infinitesimalien damit gar keine eigenen Entitäten sind – oder ob Infinitesimalien sehr wohl Entitäten sind, die zwar durch Fiktion eingeführt werden, die aber mit einer bestimmten Vorstellung verbunden sind. Die erste Interpretation wird *synkategorematisch* genannt, weil Infinitesimalien dann im Grunde nichts *bezeichnen*, sondern nur abkürzend für eine kompliziertere Formulierung mit Quantoren und endlichen Größen stehen, die zweite Interpretation *formalistisch*, weil Infinitesimalien dann Entitäten sind, deren (fiktive) Existenz sich wie im Hilbert'schen Formalismus aus der Konsistenz einer Theorie ergibt. Man kann dann so tun, *als ob* es diese Entitäten gäbe.

Welche der beiden Interpretationen dem historischen Leibniz besser gerecht wird, ist für die hier angestellte Untersuchung nicht entscheidend, wengleich die zweite, formalistische Interpretation wegen ihrer Nähe zur heutigen Nichtstandardanalysis einen besseren Anknüpfungspunkt bietet. In der Tat unterstelle ich eher diese Interpretation, wenn ich (ausgehend von dem Leibniztitat, das diesem Aufsatz als Motto vorangestellt ist) weiter unten von Leibniz' *Vorstellung* einer Kurve als Polygon mit unendlich kleinen Seiten spreche.

Zu dieser Interpretation kommen auch Bedürftig und Murawski, wenn sie (u. a. belegt durch Leibniz' Ausführungen zum charakteristischen Dreieck) feststellen:

Wir sehen bei Leibniz eine Erweiterung der aristotelischen Kontinuumsauffassung, die eine neue qualitative Dimension hinter der quantitativen Erfassung eröffnet. Infinitesimalien bei Leibniz sind, so meinen wir, neue Idealisierungen in der idealen Welt der geometrischen Kontinua.<sup>4</sup>

In der folgenden Betrachtung von Kurven unter einer infiniten Vergrößerung wird der Bezug zur Anschauung in den Vordergrund gestellt und unter dem Blickwinkel der Nichtstandardanalysis beleuchtet. Das Leibniztitat über eine krummlinige Figur als Polygon mit unendlich vielen der Größe nach unendlich kleinen Seiten lädt geradezu dazu ein, in Gedanken unendlich stark in die Kurve hineinzuzoomen, um zu „sehen“, was im unendlich Kleinen passiert. In der Standardanalysis ist das in Ermangelung unendlicher Zahlen nicht möglich.

---

3. Eine Auswahl einschlägiger Artikel zu diesem Thema findet sich im Literaturverzeichnis unter Goldenbaum und Jessephe 2008, Goethe, Beeley, Rabouin u. a. 2015, Arthur 2009, Arthur 2013, Tzuchien 2012, Bascelli u. a. 2014, Bair u. a. 2017, Bascelli u. a. 2016, Błaszczuk, Katz und Sherry 2013, M. Katz und Sherry 2012, Katz und Leichtnam 2013, M. G. Katz und Sherry 2013, Sherry und Katz 2012. Ich danke den Herausgebern, Gregor Nickel und Ralf Krömer, für ihren Vorschlag, hier auf die Fiktionendebatte in der Leibniz-Forschung und (in Abschnitt 2) auf das Kirsch'sche Funktionenmikroskop einzugehen.

4. Bedürftig und Murawski 2017, S. 77

Doch wie hat man sich ein Polygon mit der Größe nach unendlich kleinen Seiten vorzustellen? Hat eine Kurve unendlich viele „Knickstellen“, an denen die geraden Seiten zusammenstoßen? Oder sind die Seiten nicht wirklich gerade, sondern nur unendlich schwach gekrümmt? Sind Kurve und Polygon wirklich identisch oder unterscheiden sie sich nur unendlich wenig?

Solche Fragen lassen sich in der Nichtstandardanalysis präzise stellen und beantworten, wodurch ein aus der Leibniz’schen Idee abgeleitetes Instrument der Veranschaulichung innerhalb der Analysis eine befriedigende Rechtfertigung erhält. Um dieses Instrument, die *Technik der infiniten Vergrößerung*, um seine *mathematische Rechtfertigung* und seine *Grenzen* geht es im vorliegenden Text.

## 2 Vergrößerung als didaktisches Instrument in der Analysis

Die Technik des Vergrößerns, das „Hineinzoomen“ in Funktionsgraphen, wird auch in der Standardanalysis als didaktisches Instrument eingesetzt. Arnold Kirsch hat 1979 ein „Funktionsmikroskop“ mittels OHP-Folien realisiert „zur Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff“.<sup>5</sup> Inzwischen gibt es interaktive Realisierungen für den Computer, zum Beispiel die „Funktionslupe“ von Elschenbroich.<sup>6</sup> Der vergrößerte Funktionsgraph wird dort in einem zweiten Fenster angezeigt, wobei der Vergrößerungsfaktor dynamisch über einen Schieberegler verändert werden kann. Optional können Sekanten und Steigungsdreiecke eingeblendet werden.

Was unterscheidet die Funktionslupe bzw. das Funktionsmikroskop der Standardanalysis von der Technik einer infiniten Vergrößerung in der Nichtstandardanalysis? Die äußerlich ähnlichen Ideen basieren auf grundsätzlich verschiedenen Konzepten. Das Funktionsmikroskop ist eine Visualisierung des Beginns eines nicht endenden Prozesses, einer prinzipiell beliebig fortschreitenden, potentiell unendlichen Vergrößerung. Die infinite Vergrößerung ist eine Visualisierung infinitesimaler Verhältnisse und damit einer arithmetischen Situation des Infinitesimalkalküls.

Grenzprozesse sind naturgemäß nie beendet, sie können arithmetisch nicht vollzogen werden und erreichen ihren Grenzwert (im Allgemeinen) nie. Gerade dieser Umstand macht den Grenzwertbegriff für Schüler so schwer fassbar.<sup>7</sup> Diese Schwierigkeit bleibt auch beim Kirsch’schen Funktionsmikroskop prinzipiell bestehen.

In der Nichtstandardanalysis ist das Unendliche kein offener Prozess, sondern ein arithmetisches Objekt. Man rechnet mit unendlich kleinen (infinitesimalen) und

---

5. Kirsch 1979

6. Siehe Elschenbroich, Seebach und Schmidt 2014 und Elschenbroich,

7. Siehe Bedürftig 2018

unendlich großen (inifiniten) Zahlen wie mit gewöhnlichen, endlichen Zahlen. Der zu Grunde gelegte Rechenbereich ist der angeordnete Körper  ${}^*\mathbb{R}$  der hyperreellen Zahlen, der infinite und infinitesimale Zahlen enthält. Also können infinite Zahlen als Streckfaktoren und damit zur Veranschaulichung geometrischer Verhältnisse im unendlich Kleinen verwendet werden.

Bereits Schmieden und Laugwitz<sup>8</sup> führen die Idee einer „unendlichen Vergrößerung“ ein, um infinite Schwankungen von Nichtstandardfunktionen oder das Verhalten von Potenzreihen in infinitesimaler Umgebung ihrer Konvergenzgrenze zu analysieren. Die Vergrößerung findet hier rein formelhaft auf der  $x$ -Achse statt, zum Beispiel, indem Werte der Form  $x = 1 - \frac{\xi}{\Omega}$  ( $\Omega$  hypernatürlich) verwendet werden, um zu zeigen, dass die Nichtstandardfunktion  $x^\Omega$  für  $x \approx 1$  bei passender inifiniten Vergrößerung „wie eine Exponentialfunktion“ wächst.

Keisler greift die Idee in Gestalt eines unendlichfach vergrößernden „Mikroskops“ auf, um die Methoden der Nichtstandardanalysis für Standardfunktionen zu veranschaulichen. In seinem „Elementary Calculus“<sup>9</sup> findet man zahlreiche Abbildungen zur Differentiation und Integration, die infinitesimale Ausschnitte von Funktionsgraphen unter unendlichfacher Vergrößerung zeigen.

Die elementare Einführung Wunderling u. a. 2013 und der Zeitschriftenartikel Wunderling u. a. 1997 richten sich in erster Linie an Lehrkräfte und werben für den Einsatz von Nichtstandardmethoden im Mathematikunterricht. Unter der Bezeichnung „Unendlichkeitsbrille“ wird dort die Technik der inifiniten Vergrößerung vielfach benutzt, unter anderem um „geometrische Beweise“ zu führen, zum Beispiel bei der Ableitung der Sinusfunktion (siehe Abbildung 1). Unter inifiniten Vergrößerung erscheint der Kreis gerade. Die Tangente in  $P$ , die Sehne  $PQ$  und der Kreisbogen sind zeichnerisch nicht mehr zu unterscheiden. Die infinite Vergrößerung suggeriert  $\frac{dy}{dx} = \cos x$ , also die Ableitung der Sinusfunktion.

Wenn man aber die Theorie der Kurven ins Hyperreelle überträgt, dann ist der infinitesimale Kreisbogen mit  $dx$  ein wenig länger als die infinitesimale Sehne  $PQ$ , und der Winkel bei  $Q$  ist ein wenig größer als  $x$ . Für diesen speziellen in Abbildung 1 dargestellten Fall wird in Wunderling u. a. 2013 gezeigt, dass  $\frac{dy}{dx}$  und  $\cos x$  sich dennoch nur infinitesimal unterscheiden (geschrieben:  $\frac{dy}{dx} \approx \cos x$ ), was gerade bedeutet, dass die reelle Zahl  $\cos x$  die gesuchte Ableitung des Sinus an der reellen Stelle  $x$  ist.

Kurve, Tangente und Sehne sind also in einer infinitesimalen Umgebung eines Kurvenpunktes im Allgemeinen verschieden, aber sie unterscheiden sich bei „hinreichend gutartigen“ Kurven vernachlässigbar wenig. Dabei geht es um Richtung und Länge: Der Winkel zwischen Tangente und Sehne in einem Kurvenpunkt ist infinitesimal und der Längenunterschied zwischen Sehne und dem entsprechenden Kurvenstück ist von höherer Ordnung infinitesimal. Der Winkel zwischen zwei

---

8. Siehe Schmieden und Laugwitz 1958.

9. Keisler 2000

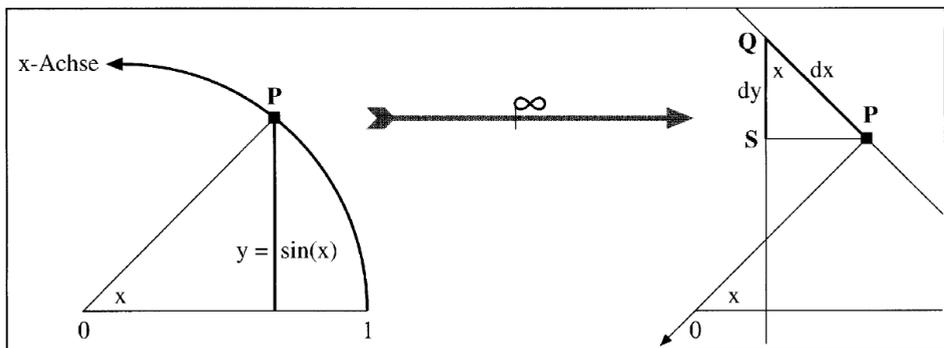


Abbildung 1: Zur Ableitung der Sinusfunktion (Quelle: Wunderling u. a. 1997)

benachbarten Sehnen ist bis auf eine infinitesimale Abweichung der gestreckte Winkel.

Im Folgenden wird gezeigt, dass dies für alle regulären stetig differenzierbaren Standardkurven der Fall ist (Satz 2). Für solche Kurven gibt also die infinite Vergrößerung die geometrischen Sachverhalte im Wesentlichen korrekt wieder. Das heißt: Nur für die reelle Analysis vernachlässigbare Unterschiede werden unterdrückt. Was im Beispiel aus Abbildung 1 zunächst wie eine anschaulicher „Trick“ anmutet und für diesen speziellen Fall in Wunderling u. a. 2013 begründet wurde, ist in einem sehr allgemeinen Rahmen gerechtfertigt.

Damit ist die infinite Vergrößerung ein legitimes didaktisches Hilfsmittel für die grenzwertfreie Analysis, so wie es die potentiell beliebig gesteigerte endliche Vergrößerung für die Grenzwertanalyse ist (dort allerdings mit dem Problem der prinzipiellen Nichtvollendbarkeit des Vergrößerungsprozesses). So kann die infinite Vergrößerung sogar als sinnvolle Ergänzung zur endlichen Vergrößerung angesehen werden. Während die gesteigerte endliche Vergrößerung zeigt, in welcher Weise sich das Bild verändert (der Funktionsgraph wird „praktisch“ gerade), zeigt die infinite Vergrößerung eine Situation, die auch in der *Theorie* genügt.

### 3 Reelle Kurven

Eine *Kurve* im  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ist eine stetige Abbildung  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein (eigentliches oder uneigentliches, aber nicht entartetes) Intervall ist. Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit werden wie üblich über die Komponentenfunktionen definiert.

Eine differenzierbare Kurve  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *regulär*, wenn  $\|f'(t)\| \neq 0$  für alle  $t \in I$  ist.

Für eine Kurve  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und eine Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$  sei  $p_f(t_0, \dots, t_k)$  die Länge des Polygonzugs durch die Punkte  $f(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, k$ . Es gilt

$$p_f(t_0, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|.$$

Die Punkte  $f(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, k$  heißen die *Stützpunkte* des Polygonzugs.

**Definition 1** Eine Kurve  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt rektifizierbar mit der Länge  $L$ , wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für jede Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$  der Feinheit  $\leq \delta$  gilt

$$|p_f(t_0, \dots, t_k) - L| \leq \epsilon.$$

Aus der reellen Analysis (siehe zum Beispiel Forster 2013) ist der folgende Satz bekannt.

**Satz 1** Jede stetig differenzierbare Kurve  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist rektifizierbar, und für ihre Länge  $L$  gilt

$$L = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

## 4 Ein Ausflug in die Nichtstandardanalysis

Will man Kurven im  ${}^*\mathbb{R}^n$  untersuchen und mit Polygonzügen vergleichen, muss man zunächst den Begriffsapparat der reellen Analysis geeignet verallgemeinern. Dies geschieht in der Nichtstandardanalysis. Ich deute hier die in diesem Zusammenhang wichtigsten Ergebnisse an. Weitere Details findet man zum Beispiel in Laugwitz 1986.

- $\mathbb{R}$  und  ${}^*\mathbb{R}$  sind als angeordnete Körper elementar äquivalent, das heißt arithmetisch nicht zu unterscheiden. In beiden Strukturen gelten die gleichen arithmetischen Aussagen.
- Zu jeder finiten hyperreellen Zahl  $\alpha$  gibt es genau eine infinitesimal benachbarte reelle Zahl  $\text{st}(\alpha)$ , den *Standardteil* von  $\alpha$ .
- Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sowie Relationen über  $\mathbb{R}$  und reelle Funktionen lassen sich kanonisch auf  ${}^*\mathbb{R}$  fortsetzen. Zum Beispiel hat  $\mathbb{N}$  die kanonische Fortsetzung  ${}^*\mathbb{N}$ , die Menge der hypernatürlichen Zahlen, welche auch infinite Zahlen enthält.

- In  $\mathbb{R}$  gültige Aussagen über Mengen (zum Beispiel die Supremumseigenschaft beschränkter Mengen) gelten in  ${}^*\mathbb{R}$  nicht allgemein, sondern nur für bestimmte, sogenannte *interne* Mengen. Entsprechendes gilt für Relationen und Funktionen, da sie sich auf den Mengenbegriff zurückführen lassen.
- Insbesondere sind die kanonischen Fortsetzungen reeller Mengen, Relationen und Funktionen intern, ebenso hyperreelle Intervalle und hyperendliche Folgen  $a_1, \dots, a_\nu$  mit  $\nu \in {}^*\mathbb{N}$  (als interne Funktionen von  $\{1, \dots, \nu\}$  nach  ${}^*\mathbb{R}$ ).
- Beim Rechnen mit hyperreellen Zahlen ist zu beachten, dass  $a \approx b \Rightarrow a \cdot c \approx b \cdot c$  im Allgemeinen nur dann gilt, wenn  $c$  endlich ist.

Die hyperreelle Analysis für interne Funktionen kann analog zur reellen Analysis aufgebaut werden. Stetigkeit, Ableitung und Integral können analog definiert und analoge Sätze bewiesen werden. Zum Beispiel gelten die Mittelwertsätze der Differential- und Integralrechnung. Hyperendliche Folgen haben (wie endliche reelle Folgen) stets ein kleinstes und ein größtes Glied und erlauben die Summation ihrer Glieder. Auch Definition 1 und Satz 1 sind auf interne hyperreelle Kurven übertragbar, wobei  $a, b, L, \epsilon, \delta$  als hyperreelle Zahlen und  $k$  als hypernatürliche Zahl zu lesen sind.

Der Clou der Nichtstandardanalysis ist zum einen, dass man neben den Standardfunktionen auch interne Nichtstandardfunktionen zur Verfügung hat (zum Beispiel  $\frac{\mu}{1+\mu^2x^2}$ ,  $\mu$  infinit, als eine Dirac'sche Deltafunktion), zum anderen, dass man die reelle Analysis über den Umweg ins Hyperreelle grenzwertfrei umformulieren kann, was nichts weniger als ein zum Standard alternatives Programm zur Finitisierung der Analysis darstellt, da unendliche Grenzprozesse entfallen.

So ist eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$ , genau dann stetig in  $x \in D$ , wenn (für die kanonische Fortsetzung)  $f(\xi) \approx f(x)$  für alle  $\xi \in {}^*D$  mit  $\xi \approx x$  gilt. Sie ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn für alle  $\xi, \eta \in {}^*D$  mit  $\xi \approx \eta$  auch  $f(\xi) \approx f(\eta)$  ist. Die Ableitung kann als Standardteil des Differentialquotienten und das Integral als hyperendliche Riemann'sche Summe eingeführt werden. In Wunderling u. a. 2013 wird ein solcher grenzwertfreier Einstieg in die Analysis auf Schulniveau dargestellt.

Für die anschließende Untersuchung stetig differenzierbarer Kurven ist noch folgende Aussage von Belang. Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar (und  $f'$  daher gleichmäßig stetig), so gilt für die kanonische Fortsetzung von  $f$  und beliebige hyperreelle  $\eta_0, \eta \in [a, b]$  (jetzt als hyperreelles Intervall) mit  $\eta \approx \eta_0$

$$f(\eta) = f(\eta_0) + f'(\eta_0)(\eta - \eta_0) + \xi(\eta - \eta_0) \quad (0.1)$$

für ein  $\xi \approx 0$ .

Für  $\eta = \eta_0$  ist die Aussage trivial. Für  $\eta \neq \eta_0$  gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein  $\bar{\eta}$  zwischen  $\eta_0$  und  $\eta$  mit

$$\frac{f(\eta) - f(\eta_0)}{\eta - \eta_0} = f'(\bar{\eta}) = f'(\eta_0) + \xi$$

für ein  $\xi \approx 0$ , denn wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f'$  und  $\eta_0 \approx \bar{\eta}$  ist auch  $f'(\eta_0) \approx f'(\bar{\eta})$ . Hieraus folgt die Behauptung (0.1).

Für  $\eta \neq \eta_0$  lässt sich (0.1) einfacher so ausdrücken:

$$\frac{f(\eta) - f(\eta_0)}{\eta - \eta_0} \approx f'(\eta_0). \quad (0.2)$$

Der Differentialquotient ist also auf dem gesamten hyperreellen Intervall  $[a, b]$  (nicht nur an den reellen Punkten) eine gute Näherung für die Ableitung. In Laugwitz 1986 wird diese Eigenschaft von Funktionen *gleichmäßige Ableitbarkeit* genannt. Man beachte, dass (0.1) im Allgemeinen nicht gilt, wenn  $f$  bloß differenzierbar ist (siehe Gegenbeispiel in Abschnitt 7).

## 5 Hyperreelle Vektoren

Das Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  zweier Vektoren, die Norm  $\|\cdot\|$  eines Vektors und der Winkel  $\angle(\cdot, \cdot)$  zwischen zwei Vektoren werden in  ${}^*\mathbb{R}^n$  auf analoge Weise definiert wie in  $\mathbb{R}^n$ . Für  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)$  aus  ${}^*\mathbb{R}^n$  ist

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{und} \quad \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Für  $x, y \neq 0$  ist  $\angle(x, y)$  das eindeutig bestimmte (hyperreelle)  $\theta \in [0, \pi]$ , für das gilt

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

Aus der Definition ergibt sich  $\angle(x, y) = \angle(s \cdot x, t \cdot y)$  für alle positiven  $s, t \in {}^*\mathbb{R}$ .

$x$  heißt infinitesimal, wenn alle seine Komponenten infinitesimal sind. Dies ist äquivalent dazu, dass  $\|x\| \approx 0$  ist. Entsprechend bedeutet  $x \approx y$ , dass  $x - y$  infinitesimal ist.

**Proposition 1** *Seien  $x, y \in {}^*\mathbb{R}^n$  ungleich 0. Dann gilt*

$$\angle(x, y) \approx 0 \Leftrightarrow \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \approx 1. \quad (0.3)$$

Ist  $x$  nicht infinitesimal und  $x \approx y$ , so gilt

$$\frac{\|x\|}{\|y\|} \approx 1 \approx \frac{\|y\|}{\|x\|} \quad (0.4)$$

und

$$\angle(x, y) = \angle(s \cdot x, t \cdot y) \approx 0 \quad (0.5)$$

für alle positiven  $s, t \in {}^*\mathbb{R}$ .

*Beweis.* Sei  $\theta = \angle(x, y)$ . Wegen  $\theta \in [0, \pi]$  und der Stetigkeit des Kosinus gilt  $\theta \approx 0 \Leftrightarrow \cos \theta \approx 1$  und damit (0.3).

Sei  $x$  nicht infinitesimal und  $x \approx y$ . Dann ist  $\xi := y - x$  infinitesimal. Nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung gilt

$$\left| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \xi \right\rangle \right| \leq 1 \cdot \|\xi\| \approx 0$$

und, da  $x$  nicht infinitesimal ist, auch

$$\frac{1}{\|x\|} \cdot \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \xi \right\rangle \approx 0. \quad (0.6)$$

Damit ist

$$\frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\|x + \xi\|^2}{\|x\|^2} = 1 + \frac{\|\xi\|^2}{\|x\|^2} + \frac{2}{\|x\|} \cdot \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \xi \right\rangle \approx 1.$$

Daraus folgt (0.4).

Nun ist

$$\cos \theta = \frac{\langle x, x + \xi \rangle}{\|x\| \|y\|} = \frac{\|x\|^2 + \langle x, \xi \rangle}{\|x\| \|y\|} = \frac{\|x\|}{\|y\|} + \frac{1}{\|y\|} \cdot \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \xi \right\rangle$$

Multiplikation mit  $\frac{\|y\|}{\|x\|}$  ergibt wegen (0.4)

$$\cos \theta \approx \frac{\|y\|}{\|x\|} \cdot \cos \theta = 1 + \frac{1}{\|x\|} \cdot \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \xi \right\rangle \stackrel{(0.6)}{\approx} 1.$$

Wegen (0.3) folgt daraus (0.5).

□

## 6 Hyperreelle Kurven

Jede reelle Kurve  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  lässt sich kanonisch fortsetzen zu einer internen hyperreellen Kurve  $f: [a, b] \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n$ . Die Fortsetzung heißt dann eine *Standardkurve*. Zur Vereinfachung bezeichne ich diese Kurve wieder mit  $f$ .  $[a, b]$  bezeichne je nach Zusammenhang entweder das reelle oder das hyperreelle Intervall von  $a$  bis  $b$ .

**Satz 2** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Kurve der Länge  $L$  (mit der kanonischen Fortsetzung  $f: [a, b] \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n$ ) und  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{\kappa-1} < t_\kappa = b$  eine infinitesimale Zerlegung von  $[a, b]$ . Dann gilt

1. Das Kurvenstück und die Sehne zwischen zwei benachbarten Stützpunkten unterscheiden sich in der Länge nur infinitesimal relativ zum (bereits infinitesimalen) Parameterintervall.

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(t)\| dt - \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| = \tau_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \quad (0.7)$$

mit  $0 \leq \tau_i \approx 0$  für  $i = 1, \dots, \kappa$ .

2. Die Länge der Kurve unterscheidet sich nur infinitesimal von der Länge des Polygonzugs.

$$L \approx \sum_{i=1}^{\kappa} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \quad (0.8)$$

3. Ist  $f$  regulär, so gilt darüber hinaus:

- a) Der Winkel zwischen Tangente und Sehne in den Stützpunkten des Polygonzugs ist infinitesimal.

$$\angle(f'(t_{i-1}), f(t_i) - f(t_{i-1})) \approx 0, \text{ für } i = 1, \dots, \kappa. \quad (0.9)$$

- b) Der Winkel in den Stützpunkten zwischen zwei benachbarten Sehnen des Polygonzugs weicht nur infinitesimal vom gestreckten Winkel ab.

$$\angle(f(t_{i-1} - f(t_i)), f(t_{i+1}) - f(t_i)) \approx \pi, \text{ für } i = 1, \dots, \kappa - 1. \quad (0.10)$$

*Beweis.* Ad 1. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein  $\bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$  mit

$$L_i := \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(t)\| dt = \|f'(\bar{t}_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1}). \quad (0.11)$$

Die Sehnenlänge ist  $p_f(t_{i-1}, t_i) = \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$ .

Allgemein gilt für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in {}^*\mathbb{R}^n$

$$\|x\| \leq \sqrt{n} \cdot \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}. \quad (0.12)$$

Sei  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Dann sind die Komponentenfunktionen  $f_i$  stetig differenzierbar, und nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es jeweils ein  $s_{ii} \in [t_{i-1}, t_i]$  mit

$$\frac{f_i(t_i) - f_i(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = f'_i(s_{ii}). \quad (0.13)$$

Wegen  $s_{ii} \approx \bar{t}_i$  und der gleichmäßigen Stetigkeit der  $f'_i$  folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{L_i - p_f(t_{i-1}, t_i)}{t_i - t_{i-1}} \right| &\stackrel{(0.11)}{=} \left| \|f'(\bar{t}_i)\| - \frac{\|f(t_i) - f(t_{i-1})\|}{t_i - t_{i-1}} \right| \\ &\leq \left\| f'(\bar{t}_i) - \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| \\ &\stackrel{(0.12)}{\leq} \sqrt{n} \cdot \max \left\{ \left| f'_i(\bar{t}_i) - \frac{f_i(t_i) - f_i(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| \mid i = 1, \dots, n \right\} \\ &\stackrel{(0.13)}{=} \sqrt{n} \cdot \max \{ |f'_i(\bar{t}_i) - f'_i(s_{ii})| \mid i = 1, \dots, n \} \approx 0 \end{aligned}$$

und damit die Behauptung (0.7).

Ad 2. Seien für  $i = 1, \dots, \kappa$  infinitesimale  $\tau_i$  gemäß (0.7) gewählt, und sei  $\hat{\tau}$  ihr Maximum. Dann ist

$$0 \leq \hat{\tau} = \max\{\tau_i \mid i = 1, \dots, \kappa\} \approx 0$$

und

$$0 \leq \sum_{i=1}^{\kappa} \tau_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \leq \hat{\tau} \cdot \sum_{i=1}^{\kappa} (t_i - t_{i-1}) = \hat{\tau} \cdot (b - a) \approx 0$$

und daher

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \|f'(t)\| dt = \sum_{i=1}^{\kappa} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(t)\| dt \\ &= \sum_{i=1}^{\kappa} (\|f(t_i) - f(t_{i-1})\| + \tau_i \cdot (t_i - t_{i-1})) \\ &= \left( \sum_{i=1}^{\kappa} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \right) + \left( \sum_{i=1}^{\kappa} \tau_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \right) \\ &\approx \sum_{i=1}^{\kappa} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|. \end{aligned}$$

Ad 3a. Nach (0.2), angewendet auf alle Komponentenfunktionen, gilt

$$\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \approx f'(t_{i-1}).$$

$f'(t_{i-1})$  ist wegen der Regularität von  $f$  nicht infinitesimal. Daher folgt die Behauptung aus (0.5) in Proposition 1.

Ad 3b. Für  $i \in \{1, \dots, \kappa - 1\}$  gilt

$$\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \approx f'(t_{i-1}) \approx f'(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

wieder aufgrund von (0.2) bzw. beim mittleren  $\approx$  aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f'$ . Wegen der Regularität von  $f$  sind  $f'(t_{i-1})$  und  $f'(t_i)$  und damit auch die Außenterme nicht infinitesimal. Nach (0.5) in Proposition 1 ist daher

$$\angle(f(t_i) - f(t_{i-1}), f(t_{i+1}) - f(t_i)) \approx 0.$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung.

□

Satz 2 bestätigt Leibniz' Vorstellung einer Kurve als Polygonzug mit infinitesimalen Seiten für stetig differenzierbare Standardkurven. Kurve und Polygonzug unterscheiden sich zwar, aber der Unterschied ist für die reelle Analysis unerheblich.

Zugleich rechtfertigt Satz 2 für stetig differenzierbare Standardkurven die Technik der infiniten Vergrößerung, wie sie in Wunderling u. a. 1997 und Wunderling u. a. 2013 zur Veranschaulichung infinitesimaler Verhältnisse verwendet wird.

Bei einem grenzwertfreien Einstieg in die Analysis kann die Länge einer Kurve – ganz im Geiste der Leibniz'schen Vorstellung – als Standardteil einer hyperendlichen Summe, der Länge eines Polygonzugs mit infinitesimalen Seiten, eingeführt werden.

Eine reelle Kurve  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist rektifizierbar mit der Länge  $L$ , wenn für die kanonische Fortsetzung von  $f$  und für jede infinitesimale Zerlegung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{\kappa-1} < t_\kappa = b$  der Standardteil von  $\sum_{i=1}^{\kappa} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$  existiert und gleich  $L$  ist.

Bereits Robinson behandelt in seiner Non-standard Analysis eine elementare Differentialgeometrie der Kurven (formuliert für den dreidimensionalen Fall).<sup>10</sup> Er

---

10. Siehe Robinson 1996, S. 83-88. Den Hinweis auf Robinson verdanke ich Herrn Prof. Reinhard Hochmuth.

zeigt, dass man die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve in Übereinstimmung mit der klassischen Definition als Standardteil einer Polygonzuglänge bei gleichmäßig infinitesimal unterteiltem Parameterintervall definieren kann. Dies ist ein Spezialfall von Satz 2, Unterpunkt 2. Ebenfalls zeigt er, dass die Tangente in einem Standardkurvenpunkt  $P$  in ihrem endlichen Teil nur infinitesimal von der Sekante durch  $P$  und einen infinitesimal benachbarten Kurvenpunkt  $Q$  abweicht. Genauer: Jeder hyperreelle endliche Punkt auf der Sekante liegt in infinitesimaler Nachbarschaft (genau) eines reellen Punktes auf der Tangente. Daraus folgt, dass der Winkel zwischen Tangente und Sekante infinitesimal sein muss (in Übereinstimmung mit Satz 2, Unterpunkt 3a).

Im vorliegenden Aufsatz ist die Längenformel (0.8) für stetig differenzierbare reelle Kurven eher ein Nebenergebnis, denn im Vordergrund steht die Rechtfertigung der infiniten Vergrößerungstechnik, also der „Beobachtung“ eines infinitesimalen Bildausschnitts und damit der Vergleich von infinitesimalen Kurvenstücken und Sehnen bezüglich Länge und Winkel. Daher muss die allgemeinere Längendefinition für interne hyperreelle Kurven herangezogen werden, auch wenn in Satz 2 nur Standardkurven betrachtet werden. Eine solche Untersuchung ist mir von anderen Autoren bislang nicht bekannt.

## 7 Die Grenzen der Vergrößerungstechnik

Dass die infinite Vergrößerung sehr wohl täuschen kann, wenn die Kurve nur differenzierbar ist, zeigt das folgende Beispiel. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

$f$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar, aber in 0 nicht stetig differenzierbar. Für  $x \neq 0$  ist  $f'(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x}$  und an der Stelle 0 gilt

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( h \sin \frac{\pi}{h} \right) = 0.$$

$f$  hat die Nullstellen  $\frac{1}{n}$  für  $n \in \mathbb{N}$  und jeweils zwischen  $\frac{1}{n+1}$  und  $\frac{1}{n}$  ein lokales Minimum bzw. Maximum, dessen Betrag zwischen  $\frac{1}{(n+1)^2}$  und  $\frac{1}{n^2}$  liegt. Für die Länge  $L_n$  des Funktionsgraphen zwischen den Nullstellen  $\frac{1}{n+1}$  und  $\frac{1}{n}$  gilt daher

$$L_n \geq \frac{2}{(n+1)^2}.$$

Die Intervalllänge  $I_n$  zwischen den Nullstellen  $\frac{1}{n+1}$  und  $\frac{1}{n}$  ist

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

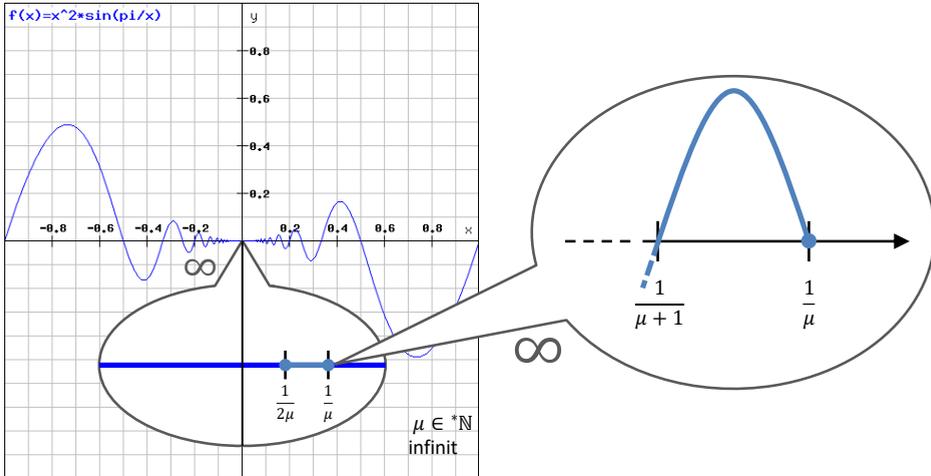


Abbildung 2: Der Funktionsgraph von  $f$  in einem infinitesimalen Intervall um 0

Für den Längenüberschuss des Graphen gegenüber dem Intervall gilt

$$D_n = L_n - I_n \geq \frac{2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n(n+1)^2}$$

und für den Längenüberschuss relativ zur Intervalllänge somit

$$\frac{D_n}{I_n} \geq \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}.$$

Sei  $D\left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{m}\right)$  der Längenüberschuss des Graphen zwischen den Nullstellen  $\frac{1}{2m}$  und  $\frac{1}{m}$  gegenüber dem zugehörigen Intervall. Dann gilt

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{m}\right) &= \sum_{n=m}^{2m-1} I_n \cdot \frac{D_n}{I_n} \geq \sum_{n=m}^{2m-1} I_n \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{2}{m+1}\right) \cdot \sum_{n=m}^{2m-1} I_n = \left(1 - \frac{2}{m+1}\right) \cdot \frac{1}{2m}. \end{aligned}$$

Also gilt auch für das Intervall von  $\frac{1}{2m}$  bis  $\frac{1}{m}$ : Der relative Längenüberschuss des Graphen gegenüber dem Intervall der Länge  $\frac{1}{2m}$  ist  $\geq 1 - \frac{2}{m+1}$ .

Alle Überlegungen übertragen sich auf die hyperreelle Fortsetzung von  $f$ . Bei unendlichfacher Vergrößerung mit dem hypernatürlichen Faktor  $\mu$  an der Stelle 0 sind der Funktionsgraph und die  $x$ -Achse (als Tangente) nicht zu unterscheiden (siehe Abbildung 2). Die Ausschläge des Graphen sind von der Größenordnung  $x^2$

und verschwinden in der Darstellung. Der relative Längenüberschuss des Graphen gegenüber dem Intervall ist aber  $\geq 1 - \frac{2}{\mu+1}$  und damit nicht infinitesimal.

Die Nullstellen sind unendlich gedrängt und in der Darstellung nicht zu unterscheiden, denn der Abstand zwischen  $\frac{1}{\mu+1}$  und  $\frac{1}{\mu}$  ist infinitesimal relativ zu  $\frac{1}{\mu}$ .

Auch der Winkel zwischen  $x$ -Achse und Funktionsgraph ist im Allgemeinen nicht infinitesimal, sondern schwankt mit  $f'(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x}$  zwischen nicht infinitesimalen positiven und negativen Werten. In einer infinitesimalen Umgebung von 0 unterscheiden sich also die Kurventangenten erheblich, obwohl bei infinitener Vergrößerung zeichnerisch kein Unterschied zwischen Kurve und  $x$ -Achse auszumachen ist.

## 8 Fazit

Das Eingangsbeispiel aus Abbildung 1 stellt sich unter Verwendung von Satz 2 folgendermaßen dar. Der Winkel im Punkt  $Q$  beträgt  $x + d\varphi$  mit  $d\varphi \approx 0$  und der infinitesimale Kreisbogen von  $P$  bis  $Q$  hat die Länge  $dx = |PQ| + d\xi$  mit  $\frac{d\xi}{dx} \approx 0$ . Aufgrund der Stetigkeit des Kosinus ist dann (für reelles  $x$ )

$$\cos x \approx \cos(x + d\varphi) = \frac{dy}{|PQ|} = \frac{dy}{dx - d\xi} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{1 - \frac{d\xi}{dx}} \approx \frac{dy}{dx}$$

und daher  $\cos x = \text{st}\left(\frac{dy}{dx}\right)$  die gesuchte Ableitung von  $\sin x$ .

Satz 2 ist nun für eine sehr allgemeine Klasse von Kurven, nämlich die der stetig differenzierbaren Kurven anwendbar.

Funktionen wie die in Abschnitt 7 betrachtete sind bewusst „pathologisch“ konstruiert, um den Unterschied zwischen Differenzierbarkeit und stetiger Differenzierbarkeit herauszuarbeiten, wobei dort nur die Stelle 0 problematisch ist.<sup>11</sup>

Die im Schulunterricht behandelten differenzierbaren Funktionen sind in aller Regel auch stetig differenzierbar. Ihre Graphen sind reguläre Kurven. Daher kann man sie, wie von Leibniz angeregt, ohne Verlust als Polygonzüge mit infinitesimalen Seiten ansehen. Die infinite Vergrößerung erweist sich dann als ein adäquates und starkes Hilfsmittel zur Veranschaulichung von Nichtstandardmethoden in einer grenzwertfreien Analysis.<sup>12</sup>

11. Ein analoges Beispiel einer pathologischen Funktion betrachtet auch Elschenbroich mit seiner Funktionenlupe. Man sieht dort, wie die Kräuselungen des Funktionsgraphen immer enger und flacher werden, bis dieser nicht mehr von der  $x$ -Achse zu unterscheiden ist.

12. Der in diesem Aufsatz verwendete Zugang zur Nichtstandardanalysis über eine Körpererweiterung von  $\mathbb{R}$  zu  ${}^*\mathbb{R}$  geht auf Robinson zurück. Ein anderer Weg zur Nichtstandardanalysis ist Nelsons *Internal Set Theory*, die in dem folgenden Aufsatz „Zur Axiomatisierung der reellen Zahlen“ nach einer Analyse der üblichen Einführung der reellen Zahlen die Grundlage bilden wird. Da dort die Mengenlehre selbst erweitert wird, erübrigen sich die Körpererweiterung von

## Literaturverzeichnis

- Arthur, Richard TW. 2009. Actual infinitesimals in Leibniz's early thought. *The Philosophy of the Young Leibniz, Studia Leibnitiana Sonderhefte* 35:11–28.
- . 2013. Leibniz's syncategorematic infinitesimals. *Archive for history of exact sciences* 67 (5): 553–593.
- Bair, Jacques, Piotr Błaszczyk, Robert Ely, Valérie Henry, Vladimir Kanovei, Karin U Katz, Mikhail G Katz, Semen S Kutateladze, Thomas McGaffey, Patrick Reeder u. a. 2017. Interpreting the infinitesimal mathematics of Leibniz and Euler. *Journal for general philosophy of science* 48 (2): 195–238.
- Bascelli, Tiziana, Piotr Błaszczyk, Vladimir Kanovei, Karin U Katz, Mikhail G Katz, David M Schaps und David Sherry. 2016. Leibniz versus Ishiguro: Closing a Quarter Century of Syncategoremania. *HOPOS: The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science* 6 (1): 117–147.
- Bascelli, Tiziana, Emanuele Bottazzi, Frederik Herzberg, Vladimir Kanovei, Karin U Katz, Mikhail G Katz, Tahl Nowik, David Sherry und Steven Shnider. 2014. Fermat, Leibniz, Euler, and the gang: The true history of the concepts of limit and shadow. *Notices of the AMS* 61 (8).
- Bedürftig, Thomas. 2018. Über die Grundproblematik der Grenzwerte. *Math Semesterber.* doi:<https://doi.org/10.1007/s00591-018-0220-0>.
- Bedürftig, Thomas, und Roman Murawski. 2017. Historische und philosophische Notizen über das Kontinuum. *Mathematische Semesterberichte* 64:63–88.
- Błaszczyk, Piotr, Mikhail G Katz und David Sherry. 2013. Ten misconceptions from the history of analysis and their debunking. *Foundations of Science* 18 (1): 43–74.
- Elschenbroich, Hans-Jürgen. FUNKTIONENLUPE.de. Besucht am 3. Mai 2018. <http://www.funktionenlupe.de/>.
- Elschenbroich, Hans-Jürgen, Günter Seebach und Reinhard Schmidt. 2014. Die digitale Funktionenlupe. Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. *mathematik lehren* 187.
- Forster, Otto. 2013. *Analysis 2*. Springer Spektrum.
- Goethe, Norma B, Philip Beeley, David Rabouin u. a. 2015. *GW Leibniz, interrelations between mathematics and philosophy*. Springer.

---

$\mathbb{R}$ , die Fortsetzung reeller Funktionen und die Erweiterung von endlich zu hyperendlich. Ebenso entfällt die Unterscheidung zwischen internen und externen Mengen, da nur intern Mengen gebildet werden.

- Goldenbaum, Ursula, und Douglas Jesseph. 2008. *Infinitesimal differences: Controversies between Leibniz and his contemporaries*. Walter de Gruyter.
- Katz, Mikhail G, und Eric Leichtnam. 2013. Commuting and noncommuting infinitesimals. *American Mathematical Monthly* 120 (7): 631–641.
- Katz, Mikhail G, und David Sherry. 2013. Leibniz’s infinitesimals: Their fictionality, their modern implementations, and their foes from Berkeley to Russell and beyond. *Erkenntnis* 78 (3): 571–625.
- Katz, Mikhail, und David Sherry. 2012. Leibniz’s laws of continuity and homogeneity. *Notices of the American Mathematical Society* 59 (11).
- Keisler, H. Jerome. 2000. *Elementary Calculus – An Infinitesimal Approach*. 2. Aufl. University of Wisconsin.
- Kirsch, Arnold. 1979. Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. *Der Mathematikunterricht* 25 (3): 25–41.
- Laugwitz, Detlef. 1986. *Zahlen und Kontinuum*. Mannheim: Bibliographisches Institut.
- Leibniz, Gottfried Wilhelm. 2016. *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae*. Herausgegeben von Eberhard Knobloch. Springer Spektrum.
- Robinson, Abraham. 1996. *Non-standard Analysis*. Revised. Princeton University Press.
- Schmieden, Curt, und Detlef Laugwitz. 1958. Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. *Math. Zeitschr.* 69:1–39.
- Sherry, David, und Mikhail Katz. 2012. Infinitesimals, imaginaries, ideals, and fictions. *Studia Leibnitiana*: 166–192.
- Tzuchien, THO. 2012. Equivocation in the foundations of Leibniz’s infinitesimal fictions. *Societate și Politică* 6 (12): 70–98.
- Wunderling, Helmut, u. a. 1997. Infinitesimalmathematik. *MU (Der Mathematikunterricht)* Heft 1.
- Wunderling, Helmut, Peter Baumann, Angelika Keller und Thomas Kirski. 2013. *Analysis als Infinitesimalrechnung*. Berlin: DUDEN PAETEC.