

Inhaltsverzeichnis

Karl Kuhlemann

Nichtstandard in der elementaren Analysis – Kröte oder Froschkönig? 1

Nichtstandard in der elementaren Analysis – Kröte oder Froschkönig?

Karl Kuhlemann

1 Standard und Nichtstandard

Die elementare Analysis wird heute sowohl in der Schule als auch an der Hochschule fast ausnahmslos auf der Basis des Weierstraß'schen Grenzwertformalismus gelehrt. Vor diesem Hintergrund scheint die Bezeichnung „Standardanalysis“ aus heutiger Sicht gerechtfertigt. Der Gebrauch infinitesimaler Größen, wie er bis Ende des 19. Jahrhunderts in der Analysis üblich (also Standard) war – wenn auch umstritten –, wurde durch den Grenzwertformalismus entbehrlich, um den Preis eines zwar logisch einwandfreien, aber umständlicheren und weniger intuitiven Beweisans.

Die logischen Vorbehalte gegen den Gebrauch infinitesimaler Größen wurden in den 1960er Jahren mit der Entwicklung der Nichtstandardanalysis durch Schmieden, Laugwitz und Robinson ausgeräumt. Seitdem hat sich die Nichtstandardanalysis nicht nur in der Forschung etabliert, wo sie zum Beispiel in Funktionalanalysis, Stochastik oder Topologie Anwendung findet. Es gibt inzwischen zahlreiche Untersuchungen, die zeigen, wie Nichtstandard auch in der elementaren Lehre der Analysis gewinnbringend eingesetzt werden kann, um Herleitungen direkter und intuitiver zu gestalten. Dies betrifft vornehmlich den ersten Zugang zu den Grundbegriffen der Analysis.¹

Diese Möglichkeit wird allerdings bislang kaum genutzt und ist anscheinend im Bewusstsein der Mathematikerinnen und Mathematiker wenig präsent. Als Begründung wird oft der logische Hintergrund genannt und der enorme Aufwand,

1. Eine Zusammenstellung von Artikeln und Literaturhinweisen sowie umfangreiches Material für den praktischen Einsatz im Unterricht findet man zum Beispiel auf www.nichtstandard.de.

den man betreiben muss, wenn man die Theorie systematisch aufbauen will. Dieser systematische Aufbau, den man meint, speziell der Nichtstandardanalysis vorschalten zu müssen, ist aber vielleicht nur ein Vorwand, um dem ungewohnten Nichtstandarddenken auszuweichen.

Bei einer unvoreingenommenen Betrachtung darf nicht vergessen werden, dass auch die Standardanalysis starker Voraussetzungen bedarf und das Ergebnis eines zähen Ringens um die Grundlagen der Analysis und der Mathematik insgesamt war. Das Ergebnis erscheint nur demjenigen vollkommen natürlich und vertraut, der (ausschließlich) eine Standardausbildung genossen und verinnerlicht hat.

In diesem Aufsatz greife ich exemplarisch einige Punkte auf, die mir geeignet erscheinen, das Standarddenken kritisch zu hinterfragen, und gebe einen kurzen Einblick in gängige elementare Einführungen in die Nichtstandardanalysis.

2 Rechnen mit Unendlich

Unendliche Mengen sind heute eine mathematische Selbstverständlichkeit. Schon in der Schule werden die Menge aller natürlichen, aller ganzen oder aller rationalen, ja sogar aller reellen Zahlen gebildet und mit den harmlos scheinenden Symbolen \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} bezeichnet. Es wird von unendlichen Dezimalbrüchen, Intervallschachtelungen oder unendlichen Punktfolgen gesprochen, in der Regel, ohne dies als Problem zu thematisieren.

Aus der Arithmetik wird das Unendliche jedoch weitgehend verbannt. Zwar ist die Existenz nicht-archimedischer Körper jedem ausgebildeten Mathematiker bekannt, aber in der Schule oder in universitären Anfängervorlesungen spielen solche Körper kaum eine oder gar keine Rolle. Hierdurch entsteht leicht der Eindruck, das Rechnen mit unendlich großen (oder unendlich kleinen) Zahlen wäre etwas logisch Widersprüchliches oder zumindest etwas Verbotenes.

Ein einfaches Beispiel mag dies illustrieren: Als Begründung dafür, dass man nicht durch Null dividieren darf, wird von Schülern (vielleicht auch von Lehrern?) bisweilen angeführt, dass das Ergebnis unendlich sein müsste. Eine solche Begründung trifft in zweifacher Hinsicht nicht. Zum einen wäre ein unendlich großes Ergebnis keine arithmetische Unmöglichkeit. Zum zweiten wäre eine unendlich große Zahl eben nicht das multiplikative Inverse der Null (das wäre in der Tat widersprüchlich), sondern einer unendlich kleinen (aber positiven) Zahl.

Was spricht gegen die Existenz einer „neuen“ Zahl Ω , die per definitionem größer als alle natürlichen (und damit auch größer als alle reellen) Zahlen ist? Nichts. Eine solche Zahl lässt sich problemlos an einen gegebenen Körper wie \mathbb{Q} oder \mathbb{R} adjungieren, und das Rechnen in diesem erweiterten Zahlbereich $\mathbb{Q}(\Omega)$ bzw.

$\mathbb{R}(\Omega)$ kann sogar von Schülern erforscht werden. Auch die Fortsetzung rationaler Funktionen auf diese Erweiterungskörper bereitet keine Schwierigkeiten.

Der Einsatz infinitesimaler (unendlich großer) und infinitesimaler (unendlich kleiner) Zahlen in der elementaren Analysis ist verlockend. Man könnte zum Beispiel, anknüpfend an die Ansätze der Pioniere der Analysis, unter Umgehung von Grenzwertüberlegungen, direkt mit Differentialquotienten rechnen, etwa für die Funktion $f(x) = x^2$ mit infinitesimalem $dx \neq 0$ und $dy = f(x + dx) - f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} = 2x + dx \approx f'(x)$$

und so (bis auf den infinitesimalen Fehler dx) die Ableitung $f'(x)$ erhalten. Das Zeichen \approx steht hier und im Folgenden für einen infinitesimalen Unterschied.

Allerdings reicht für die Analysis der Erweiterungskörper $\mathbb{R}(\Omega)$ nicht aus, denn man will nicht nur rationale Funktionen, sondern auch Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen und andere transzendente Funktionen untersuchen. Und zur Behandlung von Reihen und Integralen braucht man Summationen mit unendlichen Summationsindizes. In $\mathbb{R}(\Omega)$ ist aber vollkommen unklar, was Ausdrücke wie $\sin(\Omega)$, 2^Ω oder $\sum_{n=0}^{\Omega} \frac{1}{n!}$ bedeuten sollen, wenn man nur weiß, dass Ω größer als alle natürlichen Zahlen ist.

Für die Nichtstandardanalysis braucht man also einen umfangreicheren Zahlenbereich und weitere Festlegungen. Aber für eine erste Begegnung mit Nichtstandarddenken, für einen ersten experimentellen Umgang mit infiniten und infinitesimalen Zahlen eignet sich $\mathbb{R}(\Omega)$ sehr wohl.

3 Warum sollte man sich mit Nichtstandard befassen?

Detlef Laugwitz schreibt zu der Frage „Was ist Infinitesimalmathematik und wozu betreibt man sie?“: ²

Wozu also betreibt man irgendeine Mathematik. Ich sehe vor allem drei mögliche Rechtfertigungsgründe,

1. den der Anwendung im weitesten Sinne, sei es in der Lösung von Problemen innerhalb und außerhalb der Mathematik, sei es durch die Neu- oder Weiterentwicklung von Methoden;
2. den des Unterrichts, sei es durch Beiträge zu den Inhalten oder durch eine Verbesserung der Vermittlung;

2. Laugwitz 1978, S. 10

3. den der Reflexion auf die Mathematik selbst, seien es ihre Geschichte oder ihre Weiterentwicklung.

Inwieweit sind diese Gründe für die elementare Analysis relevant? Gehen wir die Punkte der Reihe nach durch.

Der erste Rechtfertigungsgrund ist eine wesentliche Triebfeder für den Einsatz von Nichtstandard in der Forschung. Nichtstandard ist eine echte Erweiterung von Standard. Das heißt, es gibt Sätze, die in der Nichtstandardanalysis beweisbar sind, aber nicht oder nur wesentlich komplizierter in der Standardanalysis. Der Vorteil von Nichtstandard liegt dabei oft darin, dass Objekte in der Nichtstandardwelt explizit konstruiert werden können, für die sonst nur die Existenz beweisbar ist, und dass kontinuierliche Probleme quasi wie endliche behandelt werden können.³

Letzteres spielt auch in der elementaren Analysis eine Rolle, wenn Integrale als sogenannte *hyperendliche* Summen berechnet werden. Ebenso kann das Rechnen mit „divergenten Reihen“ als methodische Bereicherung in der elementaren Analysis angesehen werden. Der Begriff ist in Anführungszeichen gesetzt, weil es in der Nichtstandardanalysis im eigentlichen Sinn keine divergenten Reihen, sondern nur Summen mit infinitem Ergebnis gibt. Mit diesen kann aber ganz normal arithmetisch gerechnet werden. Man betrachte dazu das folgende einfache Beispiel nach einem Ansatz von Johann Bernoulli (mit einer unendlich großen Zahl Ω).⁴

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n+1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\Omega+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{\Omega+1} \approx 1 \end{aligned}$$

Die beiden Summen hinter dem zweiten Gleichheitszeichen sind infinit, wären also als unendliche Reihen in der Standardanalysis divergent. In der Nichtstandardanalysis sind das konkrete Zahlen, und als Ergebnis kommt (bis auf eine unendlich kleine Abweichung) der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ heraus. Allerdings ist noch zu klären, was die Summation bis Ω bedeuten soll.

Der zweite Rechtfertigungsgrund ist für die Verwendung von Nichtstandard in der elementaren Analysis zentral, denn hier geht es vornehmlich um die Vermittlung von Ideen, von Grundbegriffen und Methoden der Analysis. Die folgende Aufzählung skizziert das Nichtstandardprogramm für die Stetigkeit, Differenzierbarkeit

3. Anwendungen aus Funktionalanalysis, Topologie und Stochastik findet man zum Beispiel in Váth 2007 bzw. Landers und Rogge 1994. Die übliche Konstruktion der Nichtstandardwelt mittels Ultrafilter enthält allerdings selbst ein nicht-konstruktives Element, da der verwendete Ultrafilter nicht explizit angegeben werden kann. Seine Existenz wird mit dem Auswahlaxiom bzw. dem Zorn'schen Lemma bewiesen.

4. Schmieden und Laugwitz 1958, S. 15

und Integrierbarkeit von Standardfunktionen (also gewöhnlichen reellen Funktionen, die man sich auf den erweiterten Zahlenbereich fortgesetzt denkt) sowie für Häufungspunkte von Folgen. Der *Standardteil* einer Zahl ist dabei die infinitesimal benachbarte reelle Zahl. Wenn der Standardteil existiert, so ist er eindeutig bestimmt.

- Eine Standardfunktion ist stetig (an einer Stelle), wenn dort jede unendlich kleine Änderung dx des Arguments nur eine unendlich kleine Änderung dy des Funktionswerts bewirkt.
- Die Ableitung einer differenzierbaren Standardfunktion (an einer Stelle) ist der Standardteil des Differentialquotienten, also des Verhältnisses der Funktionswertänderung dy zu einer infinitesimalen Argumentänderung $dx \neq 0$. Anschaulich konstruiert man ein infinitesimales Steigungsdreieck. Die Differenzierbarkeit ist gegeben, wenn der Standardteil existiert und unabhängig von der infinitesimalen Argumentänderung ist.
- Das bestimmte Integral einer integrierbaren Standardfunktion über einem Intervall ist der Standardteil einer hyperendlichen Riemann'schen Summe zu einer infinitesimalen Zerlegung des Intervalls, anschaulich die Flächensumme von infinitesimal breiten Rechtecken mit der Höhe eines Funktionswertes in dem jeweiligen infinitesimalen Teilintervall. Die Integrierbarkeit ist gegeben, wenn der Standardteil existiert und unabhängig von der infinitesimalen Zerlegung ist.
- Die Häufungspunkte einer Folge sind die Standardteile der Folgenglieder mit unendlich großen Indizes (sofern die Standardteile existieren).

Voraussetzungen für die Durchführung dieses Programms, für das ich in Kapitel 6 verschiedene Ansätze vorstelle, sind der erweiterte Zahlenbereich, die Fortsetzung von Rechenoperationen, Funktionen und Relationen auf diesen Zahlenbereich, inklusive der hyperendlichen Summen.

Der Umgang mit den Grundbegriffen ist dann rein arithmetisch möglich ohne die für die Standardanalysis typischen ϵ - δ -Abschätzungen. Als Beispiel mag hier die Herleitung der Kettenregel genügen: Sind $y = f(x)$ und $z = g(y)$ differenzierbar, so ist nach der Kettenregel auch $h(x) = g(f(x))$ differenzierbar mit der Ableitung $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. In der Standardanalysis ist zum Beweis dieser Regel eine schwerfällige Grenzwertargumentation erforderlich. In der Nichtstandardanalysis kann man stattdessen direkt mit den Differentialen und Differentialquotienten rechnen. Mit infinitesimalem $dx \neq 0$ sowie $dy = f(x + dx) - f(x)$ und $dz = g(y + dy) - g(y)$ erhält man durch Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung und mit $f(x)$ für y

$$\begin{aligned} dz &= g(f(x) + f(x + dx) - f(x)) - g(f(x)) = g(f(x + dx)) - g(f(x)) \\ &= h(x + dx) - h(x) \end{aligned}$$

Da $\frac{dy}{dx} \approx f'(x)$ und $\frac{dz}{dy} \approx g'(y)$ ist, folgt die Kettenregel (für $dy \neq 0$) aus der simplen Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

(Für $dy = 0$ ist die Kettenregel trivialerweise auch erfüllt.)

Zum dritten Rechtfertigungsgrund: Wenn Mathematik ihrer Rolle als allgemeinbildendes Fach gerecht werden soll, gehört auch ein gewisses Maß an Selbstreflexion der Mathematik als einer sich entwickelnden Wissenschaft in den Unterricht. Leider wird dies oft weitgehend ausgeblendet, sodass Mathematik als ein im Prinzip fertig vorliegendes, Ehrfurcht gebietendes Gebäude ewiger Wahrheiten dasteht, in dem es zwar immer noch Neues zu entdecken gibt, das aber in seinen Grundfesten unverrückbar ist. Gerade das aktuell Unendliche, das Kontinuum und der Zahlbegriff bieten für die Einbeziehung des historischen Kontextes immer wieder Gelegenheit und Anlass, denn die in der Geschichte aufgetretenen Widerstände gegen die heutige Auffassung dürften auch beim lernenden Individuum in der Regel nicht ausbleiben.

4 Wann sollte man sich mit Nichtstandard befassen?

Wann ist der richtige Zeitpunkt, um sich mit Nichtstandardanalysis zu befassen? Wenn man eine solide Universitätsausbildung in Standardanalysis absolviert hat? In den Anfängervorlesungen bei der Einführung in die Analysis? Oder bereits in der Schule? Genauer müsste man fragen: Wann sollte man sich wie weitgehend mit Nichtstandard befassen? Der früheste sinnvolle Zeitpunkt scheint mir dort zu liegen, wo die Real-Mathematik in die Vereinbarungs-Mathematik übergeht, denn mit dem Infiniten und Infinitesimalen begeben wir uns in einen Bereich der reinen Theorie, in einen Bereich, der der praktischen Erfahrung prinzipiell nicht mehr zugänglich ist. In diesen Bereich gehören aber auch unendliche Mengen und reelle Zahlen (siehe Abschnitt 5.1 bzw. 5.3).

Im Grunde beginnt die Vereinbarungs-Mathematik bereits noch früher, mit der Darstellung rationaler Zahlen durch unendliche Dezimalbrüche, welche nichts anderes als Grenzwerte sind. Die ewige Diskussion um die Frage, ob der unendliche periodische Dezimalbruch $0,999\dots$ nun gleich 1 ist oder vielleicht doch kleiner, zeigt welche Schwierigkeiten entstehen, wenn Vereinbarungen als Tatsachen verkauft werden.⁵

Offenbar sind viele Schüler eher bereit, die Existenz einer unendlich kleinen positiven Zahl anzunehmen, als einen Unterschied zwischen $0,999\dots$ und 1 zu leugnen.⁶

5. Siehe etwa Bedürftig und Murawski 2015, S. 388ff.

6. Siehe z. B. Bauer 2011.

Ist das Unverständnis oder Unvoreingenommenheit? In der Nichtstandardanalysis ist in der Tat

$$\sum_{n=1}^{\mu} \frac{9}{10^n} < 1$$

für jede infinite natürliche Zahl μ . Der Unterschied zu 1 ist infinitesimal. Warum sollte man die zwangsläufig auftretende Diskussion um $0,999\dots$ nicht nutzen, um die Möglichkeit der Existenz unendlich kleiner und unendlich großer Zahlen zu thematisieren und den Vereinbarungscharakter der Interpretation unendlicher Dezimalbrüche im Bereich der rationalen oder reellen Zahlen offen anzusprechen?⁷

Bei der Einführung der reellen Zahlen kann ebenfalls die Existenz unendlich kleiner und unendlich großer Zahlen thematisiert werden. Die reellen Zahlen sind dann eben nicht alle, die man sich in einer linearen Anordnung denken kann. Die Zahlengerade wird „länger“ und „dichter“.

Bei der eigentlichen Einführung in die Analysis ergibt sich dann der in Kapitel 3 skizzierte infinitesimale Zugang ganz zwanglos. Standard- und Nichtstandarddefinitionen können dabei nebeneinander präsentiert und verglichen werden. Dies scheint auch aus dem Grund geboten, um Schülern den Anschluss an Kurse und den Zugang zu Literatur in der „Standardsprache“ zu erleichtern.

5 Wie natürlich ist Standard?

Mengenlehre und die natürlichen Zahlen werden in der Analysis (sei es in der Schule oder an der Universität) von Anfang an gebraucht, allerdings nicht formal (auf der Basis von Axiomen) sondern informell, *naiv*. Auch die reellen Zahlen werden informell eingeführt, in der Schule zum Beispiel als Punkte einer Geraden (die dann Zahlengerade heißt) oder als unendliche Dezimalbrüche (mit der Periode-9-Besonderheit).

In den Anfängervorlesungen an der Universität werden die reellen Zahlen üblicherweise als „gegeben“ vorausgesetzt und durch Axiome in ihren Eigenschaften festgelegt. Die Axiome werden dabei nicht in einer formalen Sprache, sondern umgangssprachlich, unter Verwendung der naiven Mengenlehre und der naiven natürlichen Zahlen formuliert.

Das für die reellen Zahlen zentrale Vollständigkeitsaxiom besagt zum Beispiel, dass jede Fundamentalfolge konvergiert. Dazu braucht man den Begriff der Folge, also einer Abbildung von $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, und damit sowohl die naiven natürlichen

7. In der Konstruktion der hyperreellen Zahlen (siehe Kapitel 6) werden hyperreelle Zahlen durch reelle Zahlenfolgen repräsentiert. Und $0,999\dots$ (als Partialsummenfolge) repräsentiert eine Zahl, die infinitesimal kleiner als 1 ist. Die infinitesimale Differenz zu 1 wird repräsentiert durch die Differenzfolge $(0, 1; 0, 01; 0, 001; \dots)$.

Zahlen als auch die naive Mengenlehre, um *alle* natürlichen Zahlen (gepaart mit ihren Bildern) zusammenfassen und die Folge als ein „fertiges“ Objekt ansehen zu können.

Sind die Axiome der reellen Zahlen nun bloße Übertragungen der anschaulichen Sicht auf die Zahlengerade? Wie natürlich ist diese Sichtweise, wenn man geneigt ist anzunehmen, dass es nicht nur unendliche Mengen, sondern auch unendliche Zahlen gibt?

Wie natürlich sind Mengenlehre, die natürlichen, die reellen Zahlen?

5.1 Wie natürlich ist Mengenlehre?

Im Endlichen ist Mengenlehre wenig spektakulär (wenngleich der Begriff „endlich“ sich als weniger trivial herausstellt, als es den Anschein hat)⁸. Dennoch sind bereits bei konkret angebbaren endlichen Mengen wie $\{1, 2, 3\}$ wesentliche Merkmale zu beachten, die dem Anfänger (Schüler oder Studienanfänger) unnatürlich vorkommen und daher Schwierigkeiten machen können.

Zum einen ist das die Abstraktion der Mengenbildung als solcher: Aus n Dingen wird *ein* neues Ding – die Menge der n Dinge – gedanklich erschaffen. Insbesondere die Bildung der leeren Menge \emptyset macht aus nichts etwas.

Zum zweiten ist es die Extensionalität: Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Alle eventuell bestehenden Beziehungen der Elemente untereinander werden bei der Mengenbildung abgestreift, es kommt nur auf die Zugehörigkeit zur Menge an.

Im Alltag liegen die Dinge in der Regel anders: Eine Maschine besteht aus Bauteilen, aber sie ist nicht die Menge ihrer Bauteile. In der Mathematik müssen bei einem mengentheoretischen Aufbau solche Beziehungen immer separat mitgegeben werden. Beispiel: Eine Gruppe ist ein Paar (G, \circ) , bestehend aus einer nicht leeren Menge G und einer inneren Verknüpfung \circ (das heißt einer Teilmenge von $G \times G \times G$), sodass die Gruppenaxiome erfüllt sind.

In der transfiniten Mengenlehre kommt etwas hinzu, dessen Ungeheuerlichkeit heute kaum mehr spürbar ist. Ein offener Prozess soll etwas Abgeschlossenes erschaffen: eine aktuell unendliche Menge. Zum Beispiel der offene Prozess des Zählens $1, 2, 3, \dots$ die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ aller natürlichen Zahlen. Auf den mathematischen Laien muss dies (wie für fast alle Mathematiker vor Cantor) paradox

8. In Bedürftig und Murawski 2001 wird in Kapitel 2 eine endliche (damit konsistente) Mengenlehre entwickelt, in der die Mengen genau die endlichen Mengen sind. Die echten Klassen, die „Unmengen“ sind entsprechend unendlich (und keine Mengen). Auf dieser Basis wird in natürlicher Weise und intern „Endlichkeit“ definiert (eine Menge heißt endlich, wenn man ihre Elemente „aufzählen“ kann). Die Beziehung zu anderen Endlichkeitsbegriffen und die Rolle des Auswahlaxioms wird im Anhang A dargestellt.

wirken: Etwas nicht Endendes erschafft etwas Fertiges. Es *ist* ein Paradoxon, aber eines, an das Mathematiker sich gewöhnt haben.

Als eine Konsequenz der Verwendung aktual unendlicher Mengen muss das plausible euklidische Axiom „Das Ganze ist größer als der Teil“ geopfert werden, denn eine unendliche Menge kann bijektiv auf eine echte Teilmenge abgebildet werden, wie etwa $\{0, 1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ per $n \mapsto n + 1$. Diese Eigenschaft wird bei Dedekind sogar zur Definition unendlicher Mengen.

Eine Menge heißt für gewöhnlich endlich, wenn sie bijektiv auf $\{0, \dots, n - 1\}$ (für $n = 0$ soll das die leere Menge sein) mit $n \in \mathbb{N}_0$ abgebildet werden kann. Sie heißt Dedekind-endlich, wenn sie nicht bijektiv auf eine echte Teilmenge von sich selbst abgebildet werden kann. In der üblichen Mengenlehre sind beide Definitionen äquivalent, wobei für die Implikation „Dedekind-endlich \Rightarrow endlich“ das Auswahlaxiom benötigt wird.⁹

Nach Cantor ist eine Menge jede beliebige Zusammenfassung von Dingen unserer Anschauung oder unseres Denkens (den Elementen der Menge). Die intuitiv naheliegende Mengenbildung durch Komprehension, also nach der Art $\{x \mid P(x)\}$ mit einem beliebigen Prädikat $P(x)$ führt zu Widersprüchen, wenn man etwa Prädikate wie $x = x$ oder $x \notin x$ für $P(x)$ verwendet.

Daher war es eine wesentliche Herausforderung bei der Axiomatisierung der Mengenlehre, solche Antinomien auszuschließen. ZFC (das Zermelo-Fraenkel'sches Axiomensystem mit Auswahlaxiom), ein verbreitetes Axiomensystem der Mengenlehre, erlaubt mit dem Aussonderungssaxiom nur eine relative Komprehension der Art $\{x \in M \mid P(x)\}$, wobei M eine Menge ist, deren Existenz bereits gesichert ist.

Genauer gesagt, ist das Aussonderungssaxiom ein sogenanntes Axiomenschema, das zu jedem Ausdruck $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$ aus der formalen Sprache der Mengenlehre das Axiom enthält: Für alle z und für alle y_1, \dots, y_n gibt es die Menge $\{x \in z \mid \phi(x, y_1, \dots, y_n)\}$.

In ähnlicher Weise ist das Schema der Ersetzungsaxiome aufgebaut, das Mengenbildungen der Art $\{F(x) \mid x \in I\}$, mit einer eindeutigen „Zuordnungsvorschrift“ F und einer Indexmenge I rechtfertigt.

In der heute üblichen Form beschreibt ZFC eine Mengenlehre ohne Urelemente, das heißt alle Gegenstände der Mengenlehre sind Mengen. Für einen mengentheoretischen Aufbau der Mathematik musste man daher für alle Gegenstände, die klassisch keine Mengen waren, einen mengentheoretischen Ersatz finden. Die natürlichen Zahlen werden zum Beispiel so definiert: $0 := \emptyset$ und $Sx := x \cup \{x\}$. Also $1 := \{0\}$, $2 := \{0, 1\}$, $3 := \{0, 1, 2\}$ und so weiter.

9. Siehe z. B. Ebbinghaus 2003, S. 81.

Wie aber kommt man zur Menge \mathbb{N}_0 ? Hierzu bedarf es eines Axioms, des Unendlichkeitsaxioms: Es gibt eine Menge, die 0 enthält und mit jedem x auch den Nachfolger Sx . Solche Mengen heißen *induktiv*. Dann zeigt man, dass es eine eindeutig bestimmte kleinste induktive Menge gibt, und nennt diese \mathbb{N}_0 . Das heißt für jede induktive Menge M gilt $\mathbb{N}_0 \subseteq M$.

Mit dem Unendlichkeitsaxiom kommt also das aktual Unendliche in die Mengenlehre, aber mit dem Potenzmengenaxiom wird es schwindelerregend. Wie Cantor gezeigt hat, kann eine Menge nicht bijektiv auf ihre Potenzmenge (also die Menge ihrer Teilmengen) abgebildet werden. Die Potenzmenge ist stets *mächtiger* als die Menge selbst. Aber darf man überhaupt die Existenz der Menge *aller* Teilmengen einer beliebigen Menge voraussetzen? Auch hierzu bedarf es eines Axioms. Das Potenzmengenaxiom fordert, dass es zu jeder Menge die Potenzmenge gibt, ohne eine Konstruktionsanleitung anzugeben. Es ist eine bloße Existenzaussage. Indem es *alle* Teilmengen einer Menge zusammenfasst, nimmt das Potenzmengenaxiom Bezug auf ein bereits fertig beschriebenes Universum. Diese Besonderheit wird als *Imprädikativität* des Potenzmengenaxioms bezeichnet und ist der Hauptgrund für seine kritische Betrachtung.¹⁰

Das oben schon erwähnte Auswahlaxiom besagt: Zu jeder Menge M disjunkter Mengen gibt es eine Auswahlmenge, die aus jedem Element von M genau ein Element enthält. Wie das Potenzmengenaxiom ist das Auswahlaxiom nicht konstruktiv. Darüber hinaus gibt es aber noch nicht einmal eine verbindende Eigenschaft der Elemente der Auswahlmenge an. Es fordert einfach die Existenz einer willkürlich getroffenen Auswahl. Das Auswahlaxiom war besonders umstritten, bis Gödel 1938 zeigen konnte, dass es zumindest relativ konsistent zu den übrigen Axiomen ist.

Mit dem Potenzmengenaxiom, dem Auswahlaxiom oder dem Schema der Ersetzungsaxiome werden Aussagen, die für endliche Mengen selbstverständlich oder einfach zu zeigen sind, für beliebige Mengen postuliert. Ist es natürlich anzunehmen, dass diese Aussagen von endlichen Mengen auf unendliche übertragen werden können? Ehrlicherweise können wir nur eine pragmatische Antwort geben: Es ist für die Anwendbarkeit der Mengenlehre sehr praktisch, und es ist in gewisser Weise konsequent. Und solange keine Widersprüche entstehen, spricht zumindest aus formalistischer Sicht nichts dagegen.

Mathematiker sind es gewohnt, ein „Mengenuniversum“ als Hintergrund für ihre Arbeit anzunehmen und sich gleichsam wie in einer realen Welt darin zu bewegen. Aber Mengenlehre ist Theorie. Die Existenz einer Menge zu beweisen heißt, einen mit \exists („Es gibt“) beginnenden Ausdruck aus ZFC (oder einem anderen Axiomensystem, auf das man sich verständigt hat) herzuleiten. Wir wissen nicht, ob die Mengenlehre widerspruchsfrei ist, und nach den Gödel’schen Unvollständigkeitssätzen können wir die Widerspruchsfreiheit auch prinzipiell nicht beweisen.

10. Siehe z. B. Ebbinghaus 2003, S. 35.

Wie wenig man über das Mengenuniversum weiß, zeigt die Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese, die behauptet, dass jede Teilmenge von \mathbb{R} , die mächtiger ist als \mathbb{N} , bereits genauso mächtig ist wie \mathbb{R} . Sowohl die Kontinuumshypothese, als auch ihre Negation sind jeweils für sich genommen mit ZFC verträglich (Gödel, Cohen).

Und dass ein Mengenuniversum, das den Axiomen von ZFC genügt, auch ganz ungewohnte Merkmale haben könnte, zeigen konsistente Erweiterungen von ZFC, zum Beispiel die Interne Mengenlehre von Nelson (siehe Abschnitt 6.4).

5.2 Wie natürlich sind die natürlichen Zahlen?

Die natürlichen Zahlen sind die ältesten, die wir kennen. Wir benutzen sie als Ordinalzahlen, um Dinge in eine Reihenfolge zu bringen, als Kardinalzahlen beim Zählen von Dingen oder einfach zum Rechnen.

Der Prozess des Zählens, der die natürlichen Zahlen hervorbringt, kann in einfachster Weise durch fortgesetzte Wiederholung eines bestimmten Zeichens (zum Beispiel Striche auf einem Blatt Papier oder Kerben auf einem Knochen) dokumentiert werden. Wählt man 0 als Symbol für die Null (die man zum Zählen selbst nicht braucht, die aber beim Rechnen praktisch ist) und S als Symbol für Nachfolger, so erhält man nacheinander die Zahlen 0, $S0$, $SS0$, $SSS0$ und so weiter. Da es prinzipiell immer möglich ist noch ein weiteres S voranzustellen, kommt der Prozess prinzipiell nie zu einem Ende. Er ist *potentiell unendlich*. Die Zeichenketten $S \dots S0$ können als einfachste Darstellungen der naiven, potentiell unendlichen natürlichen Zahlen verstanden werden. Diese Zahlen sind nicht Objekte einer abstrakten Theorie, sondern haben gewissermaßen direkte Entsprechungen im menschlichen Handeln. Wir können die Zeichenketten 0, $S0$, $SS0$, $SSS0$, ... effektiv hinschreiben, wenn auch praktisch nur sehr begrenzt.

Die naiven natürlichen Zahlen gebrauchen wir für metasprachliche Betrachtungen innerhalb der mathematischen Logik, etwa wenn wir bezogen auf eine formale Sprache von einem Ausdruck der Länge n , einem Ausdruck mit den freien Variablen x_0, \dots, x_n oder einem Term $S \dots S0$ mit n -maligem S sprechen. Es geht dabei stets um Zeichenketten, die im Prinzip effektiv hingeschrieben werden könnten.

Problematisch wird es, wenn wir den Prozess des Zählens auf naive Weise als umfassend betrachten und so die Menge \mathbb{N}_0 aller natürlichen Zahlen bilden wollen, denn es ist nicht möglich, \mathbb{N}_0 eindeutig zu charakterisieren. Die folgenden Überlegungen stammen von Edward Nelson.¹¹ Nehmen wir etwa diese naheliegende Charakterisierung (Zahl steht hier abkürzend für natürliche Zahl):

1. Null ist eine Zahl.

11. Siehe Nelson 2007

2. Der Nachfolger einer Zahl ist eine Zahl.
3. Null ist nicht Nachfolger einer Zahl.
4. Verschiedene Zahlen haben verschiedene Nachfolger.
5. Etwas ist nur dann eine Zahl, wenn es dies ausschließlich aufgrund der Regeln 1 und 2 ist.

Die Regeln 3 und 4 sorgen dafür, dass der Zählprozess sich nicht wiederholt, sondern immer neue Zahlen produziert. Regel 5 sagt aus, dass wir allein mit den Regeln 1 und 2 schließlich alle Zahlen erwischen. Aber was bedeutet das genau? Was heißt „ausschließlich aufgrund der Regeln 1 und 2“? Es wäre offenbar zirkulär, wenn wir das als n -maliges Anwenden der Regeln 1 und 2 definieren würden mit einer gewissen Zahl n . Wir würden bereits das Konzept der Zahl gebrauchen, um den Begriff Zahl umfassend zu definieren.

Bietet die Mengenlehre hier einen Ausweg, indem wir Dedekind und Peano folgend die natürlichen Zahlen mengentheoretisch definieren? Wie in Abschnitt 5.1 erwähnt, kann in ZFC die Menge \mathbb{N}_0 eindeutig definiert werden. Weiterhin können in ZFC (mit $Sx := x \cup \{x\}$) leicht die folgenden Sätze bewiesen werden, die eine direkte Übertragung der Regeln 1 bis 4 sind:

1. $0 \in \mathbb{N}_0$.
2. Für alle x gilt: Aus $x \in \mathbb{N}_0$ folgt $Sx \in \mathbb{N}_0$.
3. Für alle x gilt: nicht $Sx = 0$.
4. Für alle x, y gilt: Aus $Sx = Sy$ folgt $x = y$.

Was ist mit Regel 5? In ZFC gilt, dass jede induktive Menge die gesamte Menge \mathbb{N}_0 umfasst. Jede Menge, die 0 enthält und mit jedem x auch Sx , enthält alle Elemente aus \mathbb{N}_0 . Trifft das die beabsichtigte Bedeutung von Regel 5 zur Charakterisierung der naiven natürlichen Zahlen? Wir können nicht fragen, ob es für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ eine naive natürliche Zahl n mit $x = n$ gibt, denn das wäre eine Vermischung von Objektsprache und Metasprache. Wir müssen bei der Untersuchung der Frage beide Sprachebenen auseinanderhalten.

Fügt man der Sprache von ZFC noch ein undefiniertes einstelliges Prädikat ϕ hinzu und erweitert ZFC zu ZFC^ϕ durch die zusätzlichen Axiome

- $\phi(0)$,
- Für alle x gilt: Aus $\phi(x)$ folgt $\phi(Sx)$,

dann kann man für jeden Term $S \dots S0$ (mit n -maligem S), ausgehend von $\phi(0)$, in n Schritten $\phi(S \dots S0)$ beweisen.¹²

¹² Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, dann auch ZFC^ϕ , denn man kann $\phi(x)$ in einem Modell für ZFC zum Beispiel als $x = x$ interpretieren und so ein Modell für ZFC^ϕ erhalten.

Damit drückt $\phi(x)$ in der Objektsprache aus, dass x eine Zahl ausschließlich aufgrund der Regeln 1 und 2 ist, denn außer den beiden neuen Axiomen, die genau den Regeln 1 und 2 entsprechen ist ja in ZFC^ϕ nichts über ϕ bekannt. Die entscheidende Frage lautet nun, ob man in ZFC^ϕ die Aussage „Für alle x gilt: Aus $x \in \mathbb{N}_0$ folgt $\phi(x)$ “ beweisen kann. Die Antwort lautet: Nein (vorausgesetzt ZFC ist widerspruchsfrei).¹³

Die gleiche Überlegung gilt für jedes andere Axiomensystem für die natürlichen Zahlen, zum Beispiel die Peano-Arithmetik (sofern widerspruchsfrei).

Fazit: Die Elemente von \mathbb{N}_0 können nicht mit den naiven natürlichen Zahlen gleichgesetzt werden. Die aktuell unendliche Menge \mathbb{N}_0 ist kein Objekt, das naiv erfasst werden kann. Es ist Gegenstand einer Theorie, zum Beispiel der ZFC-Mengenlehre.

Damit ist auch das naive, metasprachliche endlich („ein Term $S \dots S0$ der Länge n “) vom theoretischen endlich („eine Menge, die sich bijektiv auf $\{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ abbilden lässt“) zu unterscheiden.

5.3 Wie natürlich sind die reellen Zahlen?

Wenn man in der Mathematik heute von *dem* Kontinuum spricht, meint man meistens die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen, aber dies ist eine relativ junge Sichtweise auf das Kontinuum, die sich erst Ende des 19. Jahrhunderts herausgebildet hat. Voraussetzung waren die Erfindung der Mengenlehre durch Georg Cantor und die Erfindung der reellen Zahlen, wesentlich durch Cantor und Dedekind. Bei Cantor sind reelle Zahlen Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen rationaler Zahlen (wobei zwei Folgen als äquivalent gelten, wenn sie sich nur um eine Nullfolge unterscheiden), bei Dedekind werden sie durch Schnitte in \mathbb{Q} (also Zerlegungen von \mathbb{Q} in einen unteren und einen oberen Teil) definiert.

Historisch betrachtet sind Kontinuum und Menge zwei einander ausschließende Konzepte. Eine Menge ist nach Cantor die Zusammenfassung *wohlunterschiedener* Objekte. Das klassische Kontinuum hingegen ist etwas Homogenes, in dem keine wohlunterschiedenen Objekte als Bestandteile des Kontinuums auszumachen sind. Klassisch werden Punkte (als Nicht-Kontinua) in ein Kontinuum *gesetzt*. Erst mit Cantor, Dedekind und Hilbert wird das Kontinuum zur Punktmenge erklärt und damit der Mengenlehre zugänglich gemacht. Dies ist aber ein entscheidender Wandel im Denken (siehe Bedürftig und Murawski 2015, Kapitel 3).

Schüler werden in der Regel, unter Ausblendung der historischen Entwicklung, vor vollendete Tatsachen gestellt. Nachdem man exemplarisch, durch das Abtragen der Diagonale des Einheitsquadrates eine Lücke auf der rationalen Zahlengerade identifiziert hat, definiert man die reellen Zahlen als diejenigen, die keine Lücke

13. Siehe Nelson 2007.

mehr auf der Geraden lassen. Abgesehen davon, dass hier die Transformation der anschaulichen Geraden zur Punktmenge stillschweigend vollzogen wird, ist dies keine Definition, wenn man nicht sagt, welche Punkte (als potentielle Lücken) es auf der Geraden gibt. Tatsächlich war die historische Reihenfolge genau andersherum. Die reellen Zahlen wurden mengentheoretisch definiert (als Dedekind'sche Schnitte oder als Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen) und die anschauliche Gerade zur reellen Zahlengeraden undefiniert.

Die Problematik des aktual Unendlichen steckt dabei in jeder einzelnen reellen (zumindest in jeder irrationalen Zahl), selbst wenn eine konkrete Folge $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Q}$ zu ihrer Definition angegeben werden kann. Wenn schon die Menge \mathbb{N}_0 nicht naiv erfasst werden kann, gilt das ebenso für jede irrationale Zahl. Bei der Definition von \mathbb{R} als Zusammenfassung aller reellen Zahlen kommt noch die Imprädikativität des Potenzmengenaxioms als Problem hinzu, da dieses Axiom sowohl bei der Zusammenfassung aller rationalen Fundamentalfolgen, wie auch bei der Zusammenfassung aller Dedekind'schen Schnitte gebraucht wird.

Trotz ihres Namens sind die reellen Zahlen nichts, was man direkt mit der Realität in Zusammenhang bringen könnte, wie es etwa bei den naiven natürlichen Zahlen möglich ist. Reelle Zahlen sind Theorie. Keine noch so genaue physikalische Messung könnte jemals darüber entscheiden, ob das Verhältnis zweier Messgrößen rational oder irrational ist. Dies könnte allenfalls theoretisch entschieden werden.

Da die mengentheoretischen Konstruktionen Schülern nicht zumutbar sind, werden ersatzweise unendliche Dezimalbrüche oder Intervallschachtelungen zur Definition der reellen Zahlen herangezogen. Aber die Problematik bleibt bestehen und macht Schülern durchaus zu schaffen, etwa wenn ein offener Prozess (unendlicher Dezimalbruch, unendliche Intervallschachtelung) als abgeschlossen betrachtet werden soll. Die Diskussion um die 0,999...-Frage wurde oben schon erwähnt.

Das Potenzmengenaxiom spielt im Hintergrund immer mit bei Formulierungen wie „alle unendlichen Dezimalbrüche“ oder „alle rationalen Intervallschachtelungen“. Man kann intuitiv nicht wirklich erfassen, über welchen Bereich von Dingen man hier redet. Auch die Erkenntnis, dass es sich um überabzählbare Mengen handelt, hilft nicht weiter. All diese Objekte und Begriffe sind Gegenstand der Mengenlehre und damit Theorie.

Aber haben die reellen Zahlen nicht doch einen direkten Bezug zur Anschauung? Ist es zum Beispiel nicht anschaulich einleuchtend, dass jede Intervallschachtelung nur einen Punkt auf der Geraden und damit genau eine reelle Zahl festlegt? Es kommt darauf an. Wenn man die Transformation von der anschaulichen Geraden zur Punktmenge nicht mitmacht, ist doch folgende Sichtweise viel näherliegend: Der Durchschnitt einer Intervallschachtelung ist ein unendlich kurzes Intervall. Und auf so einem Intervall, kann man nicht nur eine, sondern viele Zahlen unterbringen (die dann unendlich nahe beieinander liegen).

In der Standardanalysis werden solche infinitesimal benachbarten Zahlen durch die Konstruktion oder Axiomatik der reellen Zahlen ausgeschlossen. Jede Fundamentalfolge hat nach dem Vollständigkeitsaxiom einen Grenzwert, der nach dem archimedischen Axiom dann eindeutig bestimmt ist. Und damit enthält auch jede Intervallschachtelung genau eine reelle Zahl. Doch diese Situation ist durch die Konstruktion oder die Axiome erzwungen und nicht durch die Anschauung. Die Pioniere der Analysis von Newton und Leibniz bis Cauchy hatten eine andere Anschauung.

Spalt schreibt dazu:¹⁴

Kurz: Die Standard-Analysis kann nur deshalb den schönen Satz sagen: „Die reellen Zahlen sind vollständig.“, weil sie mit dem Begriff „gleich“ schludert und das, was man zuvor zwei Jahrhunderte lange als einen „unendlich kleinen Fehler“ markierte, weitherzig einfach als „gleich“ tituliert.

Und das archimedische Axiom gilt in der Nichtstandardanalysis in folgender Weise: Für alle (möglicherweise infinitesimalen) $x, y > 0$ gibt es eine (möglicherweise infinite) natürliche Zahl n , sodass $nx > y$ ist.

6 Elementare Einführungen in Nichtstandard

Es gibt im Wesentlichen zwei verschiedene Wege der Einführung in die Nichtstandardanalysis: den konstruktiven und den axiomatischen. Das gilt grundsätzlich auch für elementare Einführungen, um die es hier gehen soll.

Beim konstruktiven Weg bewegt man sich in der gewohnten ZFC-Mengenlehre und konstruiert eine Erweiterung ${}^*\mathbb{R}$ von \mathbb{R} , die sich in ihren arithmetischen Eigenschaften als angeordneter Körper nicht von \mathbb{R} unterscheidet. Als Untermenge von ${}^*\mathbb{R}$ findet man die entsprechende Erweiterung ${}^*\mathbb{N}_0$ von \mathbb{N}_0 und erweitert den Begriff endlich zu **-endlich* (auch *hyperendlich*). Die in Abschnitt 6.1 vorgestellte Erweiterung von \mathbb{R} zu ${}^\Omega\mathbb{R}$ verläuft im Prinzip ähnlich, die Übereinstimmung mit \mathbb{R} bezüglich der Arithmetik geht jedoch bei ${}^\Omega\mathbb{R}$ nicht so weit wie bei ${}^*\mathbb{R}$.

Beim axiomatischen Weg gibt es wiederum unterschiedliche Möglichkeiten, je nach dem, ob die Axiome für den benötigten Zahlenbereich aufgestellt werden oder für die zugrunde gelegte Mengenlehre. Letzteres geschieht in der Internen Mengenlehre von Edward Nelson.

In diesem Kapitel stelle ich jeweils zwei konstruktive und zwei axiomatische Ansätze unter folgenden Gesichtspunkten vor:

1. Wie wird der Zahlenbereich für die Nichtstandardanalysis eingeführt?

14. Siehe Spalt 2015, S 538.

2. Wie werden Aussagen über den zugrunde gelegten Zahlenbereich begründet?

6.1 Ω -Zahlen

Cantor hat die reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen rationaler Zahlen definiert. Zwei solche Folgen sind äquivalent (das heißt, sie repräsentieren dieselbe reelle Zahl), wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Analog definiert Laugwitz seine Ω -Zahlen als Äquivalenzklassen über Folgen reeller Zahlen.¹⁵ Die Unterschiede zu Cantors Definition sind, dass nicht nur Fundamentalfolgen, sondern alle Folgen betrachtet werden, und dass die Äquivalenzbedingung strenger ist. Zwei Folgen repräsentieren nur dann dieselbe Ω -Zahl, wenn sie sich nur an endlich vielen Stellen unterscheiden. Eine übliche Sprechweise hierfür ist „wenn sie *fast überall* übereinstimmen“. Somit repräsentieren zum Beispiel $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\frac{1}{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ zwei verschiedene Ω -Zahlen, die sich beide als infinitesimal herausstellen und von denen die erste doppelt so groß ist wie die zweite.

Zur Vereinfachung schreibe ich $[a_n]_{n \in \mathbb{N}}$ oder $[a_n]$ für die durch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ repräsentierte Ω -Zahl. Ein besonderes Symbol erhält die für den Kalkül namensgebende Zahl $\Omega := [n] = [1, 2, 3, \dots]$ Laugwitz verwendet für die durch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ repräsentierte Ω -Zahl das Symbol a_Ω .

Die Menge aller Ω -Zahlen wird mit ${}^\Omega\mathbb{R}$ bezeichnet. \mathbb{R} kann als Teilmenge von ${}^\Omega\mathbb{R}$ aufgefasst werden, indem jede reelle Zahl r mit der Ω -Zahl $[r]_{n \in \mathbb{N}}$ identifiziert wird.

Jede Untermenge D von \mathbb{R} kann man zu einer Untermenge ${}^\Omega D$ von ${}^\Omega\mathbb{R}$ fortsetzen, die definitionsgemäß genau diejenigen $[a_n]$ enthält, für die fast alle $a_n \in D$ sind.

Es ist leicht zu zeigen, dass folgende Definitionen wohldefiniert sind, also nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängen:

- $[a_n] + [b_n] := [a_n + b_n]$
- $f([a_n]) := [f(a_n)]$
- $[a_n] < [b_n] :\Leftrightarrow a_n < b_n$ fast überall

Dabei ist f eine auf $D \subseteq \mathbb{R}$ definierte reelle Funktion. Die Fortsetzung (die der Einfachheit halber ebenfalls mit f bezeichnet werde) ist dann auf ${}^\Omega D$ definiert. Analog zu $+$ und $<$ kann man andere Rechenoperationen bzw. Relationen auf Ω -Zahlen fortsetzen (wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind, unter Beibehaltung der Bezeichnungen). Die Division $[a_n] : [b_n]$ ist nur dann definiert, wenn b_n fast überall ungleich 0 ist.

¹⁵ Siehe Laugwitz 1978. Ursprünglich hatten Schmieden und Laugwitz ihren Ω -Kalkül für rationale Ω -Zahlen definiert (Schmieden und Laugwitz 1958).

Aufgrund der Definition von $<$ ergibt sich zum Beispiel, dass Nullfolgen über \mathbb{R} , wie $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$, infinitesimale Ω -Zahlen repräsentieren (fast alle Folgenglieder sind kleiner als jede vorgegebene reelle Zahl) und bestimmt divergente Folgen über \mathbb{R} , wie $(n)_{n \in \mathbb{N}}$, infinite Ω -Zahlen (fast alle Folgenglieder sind größer als jede vorgegebene reelle Zahl).

Da reelle Zahlenfolgen nichts anderes als Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{R} sind, lassen auch diese sich zu Funktionen von ${}^\Omega\mathbb{N}$ nach ${}^\Omega\mathbb{R}$ fortsetzen. Aus einer reellen Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erhält man die Fortsetzung $(a_\nu)_{\nu \in {}^\Omega\mathbb{N}}$. Griechische Buchstaben im Index sollen andeuten, dass der Index auch ganze Ω -Zahlen als Werte annimmt.

Setzt man die Repräsentantenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Ω -Zahl $[a_n]$ auf ${}^\Omega\mathbb{N}$ fort, so erhält man insbesondere: $a_\Omega = [a_n]$ als Rechtfertigung für Laugwitz' Bezeichnungskonvention für Ω -Zahlen.

Der Zusammenhang mit der Standardtheorie der Folgen liegt in folgendem Umstand: Die Häufungspunkte einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind gerade die Standardteile der Folgenglieder a_ν für infinite ν (sofern die Standardteile existieren). Für eine konvergente Folge liegen somit alle a_ν mit infinitem ν in der Monade (also der infinitesimalen Umgebung) des Grenzwertes $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Beispiel: Mit $a_n = (-1)^n$ hat die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Häufungspunkte 1 und -1 , und es ist $a_{2\Omega} = 1$ und $a_{2\Omega+1} = -1$.

Zur Behandlung von Integralen werden noch hyperendliche Summen gebraucht. Laugwitz führt hierzu die sogenannte *quasirationale Operation* \sum ein (und das Analogon für Produkte).

$$\sum_{\nu=b_\Omega}^{c_\Omega} a_{\Omega,\nu} := \left[\sum_{\nu=b_n}^{c_n} a_{n,\nu} \right]_{n \in \mathbb{N}}$$

Dabei sind b_Ω und c_Ω ganze Ω -Zahlen mit $b_\Omega \leq c_\Omega$, und $(a_{\Omega,\nu})$ ist durch eine Doppelfolge reeller Zahlen $(a_{n,j})_{n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}}$ gegeben.

Mit dieser Vorbereitung kann das Programm der elementaren Analysis wie in Laugwitz 1978 durchgeführt werden. Darüber hinaus können sogar Nichtstandardfunktionen wie

$$x \mapsto \frac{\Omega}{\pi(1 + x^2\Omega^2)}$$

untersucht werden, als Beispiel für eine in der elementaren Standardanalysis unmögliche Dirac'sche Deltafunktion, die bei 0 unendlich groß sein, ansonsten für endliche x verschwinden und trotzdem ein endliches Integral besitzen soll.

Der große Vorteil der Ω -Zahlen für den Einstieg in die Nichtstandardanalysis liegt in der einfachen Konstruktion. Man braucht weder spezielle Vorkenntnisse aus der

Logik noch aus der Mengenlehre. Die Konstruktion ist mit elementaren schulischen Mitteln direkt nachvollziehbar.

Es gibt allerdings auch gravierende Nachteile: Obwohl sich viele Eigenschaften der reellen Zahlen durch die Repräsentantenfolgen direkt auf die Ω -Zahlen übertragen (zum Beispiel: Aus $a_\Omega < b_\Omega$ und $b_\Omega < c_\Omega$ folgt $a_\Omega < c_\Omega$), sind \mathbb{R} und ${}^\Omega\mathbb{R}$ algebraisch doch sehr verschieden. Insbesondere ist ${}^\Omega\mathbb{R}$ kein angeordneter Körper, ja noch nicht einmal ein Körper, sondern nur ein partiell geordneter Ring.

So ist etwa $[(-1)^n]$ weder positiv noch negativ noch gleich Null. Zwei beliebige Ω -Zahlen lassen sich also nicht immer bezüglich ihrer Größe vergleichen (${}^\Omega\mathbb{R}$ ist nicht *total geordnet*). Und es ist das Produkt $[1, 0, 1, 0, \dots] \cdot [0, 1, 0, 1, \dots] = 0$, obwohl keiner der beiden Faktoren Null ist. Das heißt ${}^\Omega\mathbb{R}$ enthält Nullteiler.

Der Kern des Problems dabei ist: Es gilt zwar für jede reelle Zahl entweder die Aussage A oder deren Negation $\neg A$, aber für die Repräsentantenfolge einer Ω -Zahl gilt nicht entweder A fast überall oder $\neg A$ fast überall.

Was die Frage der Eignung der Ω -Zahlen für einen Einstieg in die Nichtstandardanalysis angeht, sind die geschilderten Nachteile weniger störend beim Rechnen als bei der Veranschaulichung. Insbesondere durch die fehlende totale Ordnung kann man sich die Ω -Zahlen nicht linear geordnet auf einer Geraden veranschaulichen.

Man kann die Nachteile dadurch beheben, dass man die Äquivalenzbedingung für die Repräsentantenfolgen modifiziert und „fast überall“ nicht als „überall bis auf endlich viele Ausnahmen“ deutet, sondern etwas lockerer, sodass manchmal auch unendlich viele Ausnahmen zulässig sind. Genauer teilt man die Teilmengen von \mathbb{N} in zwei Klassen ein, von denen die erste Klasse (\mathcal{U} genannt) alle Teilmengen enthält, die als „fast überall“ durchgehen sollen und die zweite Klasse den Rest (unter anderem alle endlichen Teilmengen). Wählt man die Aufteilung so, dass \mathcal{U} noch ein paar zusätzliche Eigenschaften erfüllt¹⁶ (insbesondere, dass für jede Teilmenge von \mathbb{N} entweder die Menge selbst oder ihre Komplementärmenge zu \mathcal{U} gehört), dann wird ${}^\Omega\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper, der in allen arithmetischen Eigenschaften mit \mathbb{R} übereinstimmt (siehe Abschnitt 6.2). Statt ${}^\Omega\mathbb{R}$ wird dann meistens die Bezeichnung ${}^*\mathbb{R}$ verwendet.

$[(-1)^n]$ ist dann zum Beispiel entweder gleich 1 oder gleich -1 , denn es gehört entweder die Menge aller geraden Indizes oder die Menge aller ungeraden Indizes zu \mathcal{U} .

Eine andere Alternative, den Nachteilen zu begegnen, besteht darin, nicht die Konstruktion und die zugrundeliegende Äquivalenzbedingung für Repräsentantenfolgen zu spezifizieren, sondern ein „Leibniz’sches Prinzip“ zu postulieren, das angibt, wie man Aussagen von \mathbb{R} nach ${}^\Omega\mathbb{R}$ übertragen kann (womit der konstruktive Weg verlassen wird). Beide Alternativen werden in Laugwitz 1986 vorgestellt und verglichen.

16. \mathcal{U} muss ein sogenannter *freier Ultrafilter* sein.

Den Namen für dieses Prinzip wählt Laugwitz aufgrund einer Formulierung aus einem Brief von Leibniz an seinen Förderer Varignon vom 2.2.1702: „Die Regeln des Endlichen gelten im Unendlichen weiter.“

Leibniz'sches Prinzip Sei $A(\cdot)$ eine Aussageform, formuliert in der Sprache von \mathbb{R} . Wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ die Aussage $A(n)$ in der zugrundegelegten Theorie von \mathbb{R} wahr ist, dann soll $A(\Omega)$ als wahrer Satz in die neue Theorie von ${}^\Omega\mathbb{R}$ aufgenommen werden.¹⁷

Am Beispiel $a_\Omega = [(-1)^n]$ heißt das: Da die Aussageform „ $a_n = 1$ oder $a_n = -1$ “ in \mathbb{R} für hinreichend große n gilt (in diesem Fall sogar für alle), gilt „ $a_\Omega = 1$ oder $a_\Omega = -1$ “ in ${}^\Omega\mathbb{R}$.

6.2 Konstruktion der hyperreellen Zahlen

Die exakte Konstruktion der hyperreellen Zahlen mittels Ultrafilter übersteigt normalerweise die Möglichkeiten einer elementaren Einführung in der Schule oder in universitären Anfängervorlesungen. Der Ultrafilter selbst kann nicht konstruiert und seine Existenz nur mit weitergehenden Kenntnissen aus der Mengenlehre (unter Verwendung des Zorn'schen Lemmas) bewiesen werden.

In ihrem Buch *Analysis als Infinitesimalrechnung*¹⁸, das zwar nicht als Schulbuch konzipiert ist, sich aber an Lehrkräfte richtet, unternehmen die Autoren dennoch den Versuch, die Konstruktion weitgehend darzulegen. Statt „fast überall“ verwenden sie die Formulierung „genügend oft“.

Zwei Folgen reeller Zahlen beschreiben dieselbe hyperreelle Zahl oder sind genügend verwandt genau dann, wenn sie bei genügend vielen Indizes, d. h. genügend oft übereinstimmen.

und

Jede Klasse genügend verwandter Folgen reeller Zahlen ist eine hyperreelle Zahl.

Mit hyperreellen Zahlen rechnet man, indem man die entsprechende Operation bei den beschreibenden Folgen gliedweise bei übereinstimmenden Indizes vornimmt.

Das folgende Transferprinzip beweisen die Autoren zwar nicht allgemein, aber zumindest für Spezialfälle. Statt $*\mathbb{R}$ verwenden sie das Symbol \mathbb{H} für die Menge der hyperreellen Zahlen.

¹⁷. Siehe Laugwitz 1986, S. 88, dort allgemein für einen archimedischen Körper K statt \mathbb{R} formuliert.

¹⁸. Siehe Wunderling u. a. 2013.

Eingeschränktes Transferprinzip Jede Aussage bez. \mathbb{R} , in der neben reellen Zahlen und Variablen auch Funktionen f sowie $+$, \cdot , \leq , $||$ und die Zeichen $=$, \in , \wedge , \vee , \neg , \Rightarrow , \forall , \exists vorkommen, ist genau dann gültig bez. \mathbb{H} , wenn die reellen Zahlen durch hyperreelle Zahlen und die Funktionen f durch ihre Erweiterungen $*f$ ersetzt werden.

6.3 Axiomatische Einführung der hyperreellen Zahlen

Keisler geht in seinem *Elementary Calculus*¹⁹ (der nach eigenen Angaben für Analysis-Anfängervorlesungen und einen Zeitraum von drei bis vier Semestern konzipiert ist) von folgenden drei Prinzipien aus:

- Fortsetzungsprinzip**
1. Die reellen Zahlen bilden eine Untermenge der hyperreellen Zahlen und die Ordnungsrelation $x < y$ für reelle Zahlen ist eine Untermenge der Ordnungsrelation für hyperreelle Zahlen.
 2. Es gibt eine hyperreelle Zahl, die größer als Null ist, aber kleiner als jede positive reelle Zahl.
 3. Für jede reelle Funktion einer oder mehrerer Variablen gibt es eine zugehörige hyperreelle Funktion $*f$ mit derselben Anzahl von Variablen. $*f$ heißt die *natürliche Fortsetzung* von f .

Transferprinzip Jede reelle Aussage, die für eine oder mehrere reelle Funktionen gilt, gilt für die hyperreelle natürliche Fortsetzung dieser Funktionen.

Einen reellen Ausdruck definiert Keisler dabei als eine Kombination von Gleichungen oder Ungleichungen über reellen Ausdrücken und Aussagen, die spezifizieren, ob ein reeller Ausdruck definiert ist oder nicht.

Standardteilprinzip Jede endliche hyperreelle Zahl liegt unendlich nahe bei genau einer reellen Zahl. Die einer hyperreellen Zahl b infinitesimal benachbarte reelle Zahl heißt Standardteil von b und wird mit $\text{st}(b)$ bezeichnet.

Auf dieser Basis wird der Kalkül der Analysis aufgebaut. Die axiomatische Einführung von Keisler erscheint insbesondere für eine Nichtstandard-Einführung in der Schule geeignet, da dort vergleichbare Prinzipien auch bei der Fortsetzung von Funktionen (zum Beispiel Exponentialfunktionen) von \mathbb{Q} nach \mathbb{R} angewendet werden.

19. Siehe Keisler 2000.

6.4 Interne Mengenlehre

Die Interne Mengenlehre (IST = *Internal Set Theory*) von Edward Nelson²⁰ ist sicher der radikalste Ansatz zur Nichtstandardmathematik, denn er setzt direkt am Fundament der Standardmathematik an, der ZFC-Mengenlehre.²¹ Die Sprache der Mengenlehre wird dazu um eine neues, undefiniertes Prädikat „standard“ erweitert, und die Axiome von ZFC werden durch drei weitere Axiome (genauer Axiomenschemata) I, S und T ergänzt (siehe unten).

Dadurch, dass die Axiome von ZFC nicht modifiziert, sondern nur ergänzt werden, bleibt die gesamte klassische Mathematik im Prinzip unverändert gültig. So werden zum Beispiel die Mengen \mathbb{N} oder \mathbb{R} in IST genauso definiert wie in ZFC.

Dennoch erscheinen die vertrauten Mengen in IST plötzlich reichhaltiger als in ZFC, denn man findet dort nun Standardelemente (für die das Prädikat standard gilt) und Nichtstandardelemente (für die standard nicht gilt). Die klassischen Objekte, wie die Zahlen $1, \frac{-2}{3}, \pi, i$ oder die Mengen $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{R}$ erweisen sich alle als standard, infinite und infinitesimale Zahlen ($\neq 0$) als nicht standard.

Man kann nicht sagen, dass die Nichtstandardobjekte in ZFC nicht existieren würden. Es gibt nur keine Möglichkeit in ZFC darüber zu entscheiden. Wenn man annimmt, Mathematik in einem Modell von ZFC zu betreiben (wie man es mit dem Mengenuniversum der „Hintergrundmengenlehre“ für gewöhnlich tut), dann könnte dieses Modell ebenso gut auch ein Modell von IST sein, denn IST ist eine konsistente Erweiterung von ZFC. Das heißt: Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, dann auch IST.²²

Ein Ausdruck in der Sprache von IST heißt *intern*, wenn er das Prädikat standard nicht enthält (direkt oder indirekt). Alle anderen Ausdrücke heißen *extern*. Nach dem Aussondungsaxiom von ZFC können interne Prädikate verwendet werden, um Untermengen einer vorgegebenen Menge zu bilden. Externe Prädikate dürfen nicht zur Mengenbildung verwendet werden (illegale Mengenbildung).

„Endlich“ ist ein internes Prädikat: x ist genau dann endlich, wenn es keine bijektive Abbildung von x auf eine echte Untermenge von x gibt. (Wie in ZFC sind auch in IST endlich und Dedekind-endlich äquivalent.)

Die Axiome, die ZFC hinzugefügt werden, sind die folgenden.

Idealisierungsaxiom (I): Sei $\phi(x, y)$ ein interner Ausdruck mit den freien Variablen x und y (und möglicherweise weiteren freien Variablen). Dann sind äquivalent:

20. Siehe Nelson 1977.

21. Einen Vergleich zwischen der Robinson'schen und der Nelson'schen Nichtstandardanalysis findet man zum Beispiel in Landers und Rogge 1994.

22. Siehe Nelson 1977.

1. Für jede endliche Standardmenge z gibt es ein x , sodass $\phi(x, y)$ für alle $y \in z$ gilt.
2. Es gibt ein x , sodass $\phi(x, y)$ für alle Standardelemente y gilt.

Standardisierungsaxiom (S): Sei $\chi(z)$ ein (interner oder externer) Ausdruck mit der freien Variable z (und möglicherweise weiteren freien Variablen). Zu jeder Standardmenge x gibt es eine Standardmenge y , deren Standardelemente genau die Standardelemente $z \in x$ mit $\chi(z)$ sind.

Transferaxiom (T): Sei $\psi(x, y_1, \dots, y_k)$ ein interner Ausdruck mit den einzigen freien Variablen x, y_1, \dots, y_k . Dann gilt für alle Standardelemente t_1, \dots, t_k : Aus $\psi(x, t_1, \dots, t_k)$ für alle Standardelemente x folgt $\psi(x, t_1, \dots, t_k)$ für alle x .

Deutet man die zweistellige Relation im Idealisierungsaxiom als „dominieren“ (man denke zum Beispiel an die Größerrelation $x > y$ in \mathbb{N}), dann besagt das Axiom I folgendes: Gibt es zu jeder endlichen Standardmenge ein (ihre Elemente) dominierendes Element, dann gibt es auch ein Element, das alle Standardelemente dominiert. Im konkreten Beispiel der Größerrelation in \mathbb{N} : Da es zu jeder endlichen Standardmenge $E \subseteq \mathbb{N}$ eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt, die größer als alle Zahlen aus E ist, gibt es auch eine Zahl in \mathbb{N} , die größer als alle Standardzahlen in \mathbb{N} ist, eine *infinite* Zahl.

Zwei einfache, aber ungewohnte Konsequenzen aus den Axiomen sind:

1. Jede unendliche Menge enthält Nichtstandardelemente.
2. Es gibt eine endliche Menge, die alle Standardelemente enthält.

Der Vorteil der internen Mengenlehre ist, dass sie von vornherein sehr allgemein angelegt und somit nicht nur für die elementare Analysis geeignet ist, und dass sie recht schnell zu weitreichenden Ergebnissen kommt.

Von einem formalistischen Standpunkt aus könnte man also einfach sagen: Wenn IST für die Mathematik nützlich ist und konservativ (in Bezug auf die klassische Mathematik) und (relativ zu ZFC) konsistent, warum sollten wir IST dann nicht nutzen?

Aber wie steht es um die Plausibilität der neuen Axiome I, S und T? Sind diese Axiome nicht doch recht kompliziert und von Wunschdenken geprägt (speziell I und T)?

Umgekehrt könnte man auch fragen: Ist nicht das Unendlichkeitsaxiom in ZFC eine Art Idealisierungsaxiom und von Wunschdenken geprägt, indem es eine aktual unendliche Menge postuliert? Ist nicht das Aussonderungsaxiom (zusammen mit den anderen) eine unter pragmatischen Gesichtspunkten getroffene Einschränkung der allgemeinen Komprehension, zur Vermeidung von Widersprüchen, ähnlich wie

das Standardisierungsaxiom? Sind nicht Vereinigungsmengen-, Ersetzungs- und Auswahlaxiom eine Art Transferaxiome und von Wunschdenken geprägt?

Alain M. Robert führt in Robert 2011 in die Interne Mengenlehre ein, ohne tiefere Kenntnisse in ZFC oder allgemein in axiomatischer Mengenlehre vorauszusetzen. Er richtet sich dabei an „advanced undergraduates“, die mit traditioneller Mathematik und intuitiver Mengenlehre vertraut sind. Gerade weil die Interne Mengenlehre eine ungewohnte Perspektive auf Gewohntes einnimmt, hält es Robert jedoch für geboten, die neuen Axiome I, S und T explizit an den Anfang zu stellen und zu besprechen, um auf „festem Grund“ zu starten. Dennoch wagt er im Vorwort auch folgenden Ausblick:

However, it is quite possible that with a new mathematical generation, a naive and intuitive approach to NSA [Non-Standard Analysis] might be possible or even better. After all, so many illustrious mathematicians – Leibniz, Euler and Cauchy in particular – all seem to have considered this approach more natural than the (nowadays called) traditional one.²³

7 Die Analysis der Zukunft?

Im Vorwort zur zweiten Auflage von Robinsons Buch *Non-Standard Analysis* von 1973 äußert sich Kurt Gödel folgendermaßen:²⁴

I would like to point out a fact that was not explicitly mentioned by Professor Robinson, but seems quite important to me; namely that non-standard analysis frequently simplifies substantially the proofs, not only of elementary theorems, but also of deep results. This is true, e.g., also for the proof of the existence of invariant subspaces for compact operators, disregarding the improvement of the result; and it is true in an even higher degree in other cases. This state of affairs should prevent a rather common misinterpretation of non-standard analysis, namely the idea that it is some kind of extravagance or fad of mathematical logicians. Nothing could be farther from the truth. Rather there are good reasons to believe that non-standard analysis, in some version or other, will be the analysis of the future. One reason is the just mentioned simplification of proofs, since simplification facilitates discovery. Another, even more convincing reason, is the following: Arithmetic starts with the integers and proceeds by successively enlarging the number system by rational and negative numbers, irrational numbers, etc. But the next quite natural step after the reals, namely

23. Siehe Robert 2011, S. xii.

24. Siehe Robinson 1996.

the introduction of infinitesimals, has simply been omitted. I think, in coming centuries it will be considered a great oddity in the history of mathematics that the first exact theory of infinitesimals was developed 300 years after invention of the differential calculus.

Hat Gödel die Entwicklung falsch eingeschätzt? Immerhin ist seit Robinsons Non-Standard Analysis über ein halbes Jahrhundert vergangen. Andererseits ist ein halbes Jahrhundert in der Geschichte der Analysis seit Leibniz und Newton kein sehr langer Zeitraum, und die Durchsetzung der Standardanalysis hat auch mehrere Jahrzehnte in Anspruch genommen.

Außerdem hat sich seit Robinson durchaus etwas getan. Die Nichtstandardanalysis hat in der Forschung ihren festen Platz und dringt auch vereinzelt in die Klassenzimmer vor, allerdings in der Regel aufgrund der Eigeninitiative einzelner Lehrkräfte, die sich für das Thema Nichtstandard interessieren und Spielräume in den Curricula nutzen – mit überaus positiven Erfahrungen.²⁵ Insgesamt ist zu vermuten, dass aufgrund der Biographie die Widerstände gegen Nichtstandard mehr bei den Lehrenden als bei den Lernenden zu finden sind.

Somit dürfte das Fehlen von Nichtstandard im Schulunterricht wesentlich auf das Fehlen von Nichtstandard in der universitären Lehre zurückzuführen sein. Gerade für die universitäre Lehre ist aber noch Arbeit zu leisten, um das Potential der Nichtstandardanalysis auszuschöpfen. Auf jeden Fall erscheint es mir nicht angemessen, die Nichtstandardanalysis in Oberseminaren zur Modelltheorie zu verstecken. Die Geschichte ist offen. Am Ende könnte sich die Einschätzung Gödels doch als zutreffend erweisen.

Literaturverzeichnis

- Bauer, Ludwig. 2011. Mathematik, Intuition, Formalisierung: eine Untersuchung von Schülerinnen- und Schülervorstellungen zu $0, \bar{9}$. *Journal für Mathematik-Didaktik* 32 (1): 79–102.
- Bedürftig, Thomas, und Roman Murawski. 2001. *Zählen – Grundlage der elementaren Arithmetik*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- . 2015. *Philosophie der Mathematik*. Berlin Boston: de Gruyter.
- Ebbinghaus, Heinz-Dieter. 2003. *Einführung in die Mengenlehre*. Spektrum Akademischer Verlag.
- Keisler, H. Jerome. 2000. *Elementary Calculus – An Infinitesimal Approach*. 2. Aufl. University of Wisconsin.

²⁵ Siehe z. B. Wunderling u. a. 1997. Das Heft steht zum Download auf www.nichtstandard.de zur Verfügung.

- Landers, Dieter, und Lothar Rogge. 1994. *Nichtstandard Analysis*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Laugwitz, Detlef. 1978. *Infinitesimalrechnung: Eine elementare Einführung in die Nichtstandard-Analysis*. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut.
- . 1986. *Zahlen und Kontinuum*. Mannheim: Bibliographisches Institut.
- Nelson, Edward. 1977. Internal Set Theory: A New Approach to Nonstandard Analysis. *Bull. of the American Mathematical Society* 83 (6): 1165–1198.
- . 2007. Hilbert's Mistake. www.math.princeton.edu/~nelson/papers/hm.pdf.
- Robert, Alain M. 2011. *Nonstandard Analysis*. Dover Publications.
- Robinson, Abraham. 1996. *Non-standard Analysis*. Revised edition. Princeton University Press.
- Schmieden, Curt, und Detlef Laugwitz. 1958. Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. *Math. Zeitschr.* 69:1–39.
- Spalt, Detlef D. 2015. *Die Analysis im Wandel und Widerstreit*. Karl Alber.
- Väth, Martin. 2007. *Nonstandard Analysis*. Basel Boston Berlin: Birkhäuser Verlag.
- Wunderling, Helmut, u. a. 1997. Infinitesimalmathematik. *MU (Der Mathematikunterricht)* Heft 1.
- Wunderling, Helmut, Peter Baumann, Angelika Keller und Thomas Kirski. 2013. *Analysis als Infinitesimalrechnung*. Berlin: DUDEN PAETEC.