Unendlichkeitslupe und infinite Vergrößerung

Karl Kuhlemann

18. November 2019

Die unendlichfache (infinite) Vergrößerung ist ein leistungsfähiges und mathematisch legitimes Instrument zur Veranschaulichung von Methoden der Infinitesimalrechnung, das im Schulunterricht gewinnbringend eingesetzt werden kann. Für die wichtige Klasse der stetig differenzierbaren Kurven (insbesondere also für Graphen stetig differenzierbarer Funktionen) führt die durch infinite Vergrößerung mögliche geometrisch-anschauliche Argumentation zu korrekten Ergebnissen.

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Die Pioniere der Analysis im 17. und 18. Jahrhundert rechneten mit infinitesimalen (also unendlich kleinen) Größen und kamen damit, trotz mancher Vorbehalte ihrer Zeitgenossen, zu weitreichenden Ergebnissen. Bis weit ins 19. Jahrhundert gehörten Infinitesimalien zum selbstverständlichen Handwerkszeug der Analysis, bis sie nach Erfindung der reellen Zahlen und der „Weierstraß'schen Epsilontik“ entbehrlich wurden.

Wir können heute auf einer mathematisch gesicherten Grundlage – der modernen Nichtstandardanalysis – auch wieder infinitesimal rechnen und uns das Potential dieses *ursprünglichen* Weges der Analysis erschließen.

Allerdings haben infinitesimale Größen in Bezug auf die Anschauung einen Nachteil. Wegen ihrer unendlichen Kleinheit können wir sie unmittelbar weder sehen noch zeichnen. Man müsste sie unendlichfach vergößern, um sie sichtbar zu machen. Ist so etwas sinnvoll möglich? Ja, denn in der Nichtstandardanalysis sind unendlich Großes und unendlich Kleines Elemente eines angeordneten Körpers, also Zahlen, mit denen man ganz normal rechnen kann. Dies ermöglicht eine unendlichfache (infinite) Vergrößerung geometrischer Sachverhalte. Kurven werden „gerade“ und fallen lokal mit Tangenten und Sehnen zusammen. Daraus ergibt sich die Möglichkeit einer *geometrischen Beweisführung.*

Schon Leibniz hat dies gesehen. In seinem (damals unveröffentlichten Werk) *De quadratura* von 1672 lesen wir

> ... sie [die Leser] werden aber bemerken, was für ein großes Feld des Entdeckens offen steht, sobald sie dieses Eine richtig begriffen haben, dass jede krummlinige Figur nichts anderes als ein Polygon mit unendlich vielen, der Größe nach unendlich kleinen Seiten ist (Leibniz 2016, Seite 131).

Das Zitat lädt geradezu dazu ein, in Gedanken unendlich stark in die Kurve hineinzuzoomen, um zu „sehen“, was im unendlich Kleinen passiert. In der Standardanalysis ist das in Ermangelung unendlich großer Zahlen nicht möglich.

Doch wie hat man sich ein Polygon mit der Größe nach unendlich kleinen Seiten vorzustellen? Hat eine Kurve unendlich viele „Knickstellen“, an denen die geraden Seiten zusammenstoßen? Oder sind die Seiten nicht wirklich gerade, sondern nur unendlich schwach gekrümmt? Sind Kurve und Polygon wirklich identisch oder unterscheiden sie sich nur unendlich wenig?

Solche Fragen lassen sich in der Nichtstandardanalysis präzise stellen und beantworten, wodurch ein aus der Leibniz'schen Idee abgeleitetes Instrument der Veranschaulichung innerhalb der Analysis eine befriedigende Rechtfertigung erhält. Um dieses Instrument, die *Technik der infiniten Vergrößerung*, um seine *mathematische Rechtfertigung* und seine *Grenzen* geht es im vorliegenden Text.

2 Vergrößerung als didaktisches Instrument in der Analysis

Die Technik des Vergrößerns, das Hineinzoomen in Funktionsgraphen, wird auch in der Standardanalysis als didaktisches Instrument eingesetzt. Arnold Kirsch hat 1979 ein *Funktionenmikroskop* mittels OHP-Folien realisiert „zur Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff“ (Kirsch 1979). Inzwischen gibt es interaktive Realisierungen für den Computer, zum Beispiel die *Funktionenlupe* von Elschenbroich (Elschenbroich, Seebach und Schmidt 2014, Elschenbroich 2015). Der vergrößerte Funktionsgraph wird dort in einem zweiten Fenster angezeigt, wobei der Vergößerungsfaktor dynamisch über einen Schieberegler verändert werden kann. Optional können Sekanten und Steigungsdreiecke eingeblendet werden.

Was unterscheidet die Funktionenlupe bzw. das Funktionenmikroskop der Standardanalysis von der Technik einer infiniten Vergrößerung in der Nichtstandardanalysis? Die äußerlich ähnlichen Ideen basieren auf grundsätzlich verschiedenen Konzepten. Das Funktionenmikroskop ist eine Visualisierung des Beginns eines nicht endenden Prozesses, einer prinzipiell beliebig fortschreitenden, potentiell unendlichen Vergrößerung. Die infinite Vergrößerung ist eine Visualisierung infinitesimaler Verhältnisse und damit einer statischen arithmetischen Situation des Infinitesimalkalküls.

Grenzprozesse sind naturgemäß nie beendet, sie können arithmetisch nicht vollzogen werden und erreichen ihren Grenzwert (im Allgemeinen) nie. Gerade dieser Umstand macht den Grenzwertbegriff für Schüler so schwer fassbar.[1] Diese Schwierigkeit bleibt auch beim Kirsch'schen Funktionenmikroskop prinzipiell bestehen.

In der Nichtstandardanalysis ist das Unendliche kein offener Prozess, sondern ein arithmetisches Objekt. Man rechnet mit unendlich kleinen (infinitesimalen) und unendlich großen (inifiniten) Zahlen wie mit gewöhnlichen, endlichen Zahlen. Der zu Grunde gelegte Rechenbereich ist der angeordnete Körper $^*\mathbb{R}$ der hyperreellen Zahlen, der infinite und infinitesimale Zahlen enthält. Also können infinite Zahlen als Streckfaktoren und damit zur Veranschaulichung geometrischer Verhältnisse im unendlich Kleinen verwendet werden.

Bereits Schmieden und Laugwitz führen die Idee einer unendlichfachen Vergrößerung ein, um infinite Schwankungen von Nichtstandardfunktionen oder das Verhalten von Potenzreihen in infinitesimaler Umgebung ihrer Konvergenzgrenze zu analysieren. Die Vergrößerung findet hier rein formelhaft auf der x-Achse statt, zum Beispiel, indem Werte der Form $x = 1 - \frac{\xi}{\Omega}$ (Ω hypernatürlich) verwendet werden, um zu zeigen, dass die Nichtstandardfunktion x^Ω für $x \simeq 1$ bei passender infiniter Vergrößerung „wie eine Exponentialfunktion" wächst (siehe Schmieden und Laugwitz 1958).

Keisler greift die Idee in Gestalt eines unendlichfach vergrößernden *Mikroskops* auf, um die Methoden der Nichtstandardanalysis für Standardfunktionen zu veranschaulichen. In seinem *Elementary Calculus* (Keisler 2000) findet man zahlreiche Abbildungen zur Differentiation und Integration, die infinitesimale Ausschnitte von Funktionsgraphen unter unendlichfacher Vergrößerung zeigen.

Die elementaren Einführungen Wunderling u. a. 2013 und Baumann und Kirski 2019 sowie der Zeitschriftenartikel Wunderling u. a. 1997 richten sich in erster Linie an Lehrkräfte und werben für den Einsatz von Nichtstandardmethoden im Mathematikunterricht. Unter der Bezeichnung *Unendlichkeitsbrille* wird dort die Technik der infiniten Vergrößerung vielfach benutzt, unter anderem um geometrische Beweise zu führen, zum Beispiel bei der Ableitung der Sinusfunktion (siehe Abbildung 1). Unter infiniter Vergrößerung erscheint der Kreis gerade. Die Tangente in P, die Sehne PQ und der Kreisbogen sind zeichnerisch nicht mehr zu unterscheiden. Die infinite Vergrößerung suggeriert $\frac{dy}{dx} = \cos x$, also die korrekte Ableitung der Sinusfunktion.

Kann man einen so einfachen und anschaulichen Beweis gelten lassen? Ein Zweifler könnte einwenden: Wenn man die Theorie der Kurven ins Hyperreelle überträgt, dann ist der infinitesimale Kreisbogen mit dx ein wenig länger als die infinitesimale Sehne PQ,

1. Siehe z. B. Bedürftig 2018

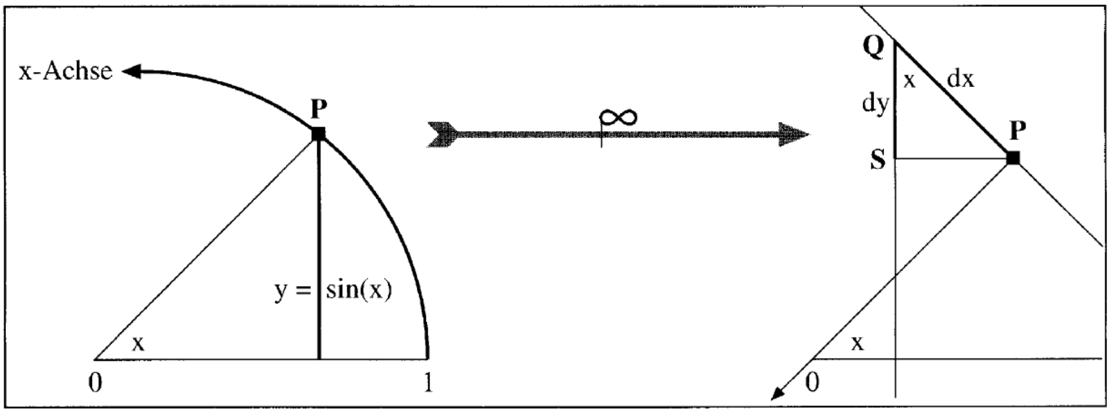

Abbildung 1: Zur Ableitung der Sinusfunktion (Quelle: Wunderling u. a. 1997)

und der Winkel bei Q ist ein wenig größer als x. Für den in Abbildung 1 dargestellten Fall wird daher in Wunderling u. a. 2013 gezeigt, dass $\frac{dy}{dx}$ und $\cos x$ sich dennoch nur infinitesimal unterscheiden (geschrieben: $\frac{dy}{dx} \simeq \cos x$), was gerade bedeutet, dass die reelle Zahl $\cos x$ die gesuchte Ableitung des Sinus an der reellen Stelle x ist.

Kurve, Tangente und Sehne sind also in einer infinitesimalen Umgebung eines Kurvenpunktes im Allgemeinen verschieden, aber sie unterscheiden sich bei hinreichend gutartigen Kurven vernachlässigbar wenig. Dabei geht es um Richtung und Länge: Der Winkel zwischen Tangente und Sehne in einem Kurvenpunkt ist infinitesimal und der Längenunterschied zwischen Sehne und dem entsprechenden Kurvenstück ist sogar relativ zum infintesimalen Parameterintervall infinitesimal (das heißt, wenn man die Längendifferenz durch die infinitesimale Länge des Parameterintervalls dividiert, ist das Ergebnis immer noch infinitesimal). Der Winkel zwischen zwei benachbarten Sehnen ist bis auf eine infinitesimale Abweichung der gestreckte Winkel.

Im Folgenden wird genauer dargelegt, dass dies für alle stetig differenzierbaren Standardkurven (das sind hyperreelle Fortsetzungen reeller Kurven) der Fall ist (Satz 1). Für die Existenz der Tangente muss noch die Regularität der Kurve vorausgesetzt werden, was anschaulich bedeutet, dass die Kurve keine „Knicke“ hat. Bei Graphen stetig differenzierbarer Funktionen ist diese Bedingung immer erfüllt.

Für solche Kurven gibt also die infinite Vergrößerung die geometrischen Sachverhalte im Wesentlichen korrekt wieder. Das heißt: Nur für die reelle Analysis vernachlässigbare Unterschiede werden unterdrückt. Was im Beispiel aus Abbildung 1 zunächst wie eine anschaulicher „Trick“ anmutet, ist also in einem sehr allgemeinen Rahmen gerechtfertigt.

Damit ist die infinite Vergrößerung ein legitimes didaktisches Hilfsmittel für die Nichtstandardanalysis, so wie es die potentiell beliebig gesteigerte endliche Vergrößerung für die Standardanalysis ist (dort allerdings mit dem Problem der prinzipiellen Nichtvollendbarkeit des Vergrößerungsprozesses). So kann die infinite Vergrößerung sogar als sinnvolle Ergänzung zur endlichen Vergrößerung angesehen werden. Während die gesteigerte endliche Vergrößerung zeigt, in welcher Weise sich das Bild verändert (der Funktionsgraph wird „praktisch“ gerade), zeigt die infinite Vergrößerung eine Situation, die auch in der *Theorie* genügt.

3 Mathematischer Hintergrund der infiniten Vergrößerung

Jede reelle Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ lässt sich kanonisch fortsetzen zu einer hyperreellen Kurve $f : [a, b] \to {}^*\mathbb{R}^n$. Solche Kurven heißen *Standardkurven*. Zur Vereinfachung wird die Fortsetzung der reellen Kurve f wieder mit f bezeichnet. $[a, b]$ bezeichnet dann je nach Zusammenhang entweder das reelle oder das hyperreelle Intervall von a bis b.

Eine streng monoton wachsende hyperendliche Folge $(t_\imath)_{0\leq\imath\leq\kappa}$ mit $t_0 = a$, $t_\kappa = b$ und $t_\imath - t_{\imath-1} \simeq 0$, für $1 \leq \imath \leq \kappa$, heißt eine *infinitesimale Zerlegung* von $[a, b]$.

Satz 1. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve der Länge L (mit der kanonischen Fortsetzung $f : [a, b] \to {}^*\mathbb{R}^n$) und $(t_\imath)_{0\leq\imath\leq\kappa}$ eine infinitesimale Zerlegung von $[a, b]$. Dann gilt*

1. *Das Kurvenstück und die Sehne zwischen zwei benachbarten Stützpunkten $t_{\imath-1}$, $t_\imath$ unterscheiden sich in der Länge nur infinitesimal relativ zum (bereits infinitesimalen) Parameterintervall.*

$$\int_{t_{\imath-1}}^{t_\imath} \|f'(t)\|\, dt - \|f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})\| = \tau_\imath \cdot (t_\imath - t_{\imath-1}) \tag{1}$$

   mit $0 \leq \tau_\imath \simeq 0$ für $\imath = 1, \ldots, \kappa$.

2. *Die Länge der Kurve unterscheidet sich nur infinitesimal von der Länge des Polygonzugs.*

$$L \simeq \sum_{\imath=1}^{\kappa} \|f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})\| \tag{2}$$

3. *Ist f regulär (also $\|f'(t)\| \neq 0$, für alle $t \in [a, b]$), so gilt darüber hinaus:*

   a) *Der Winkel zwischen Tangente und Sehne in den Stützpunkten des Polygonzugs ist infinitesimal.*

$$\angle(f'(t_{\imath-1}), f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})) \simeq 0, \text{ für } \imath = 1, \ldots, \kappa. \tag{3}$$

   b) *Der Winkel in den Stützpunkten zwischen zwei benachbarten Sehnen des Polygonzugs weicht nur infinitesimal vom gestreckten Winkel ab.*

$$\angle(f(t_{\imath-1} - f(t_\imath)), f(t_{\imath+1}) - f(t_\imath)) \simeq \pi, \text{ für } \imath = 1, \ldots, \kappa - 1. \tag{4}$$

Beweis. Siehe Kuhlemann 2018

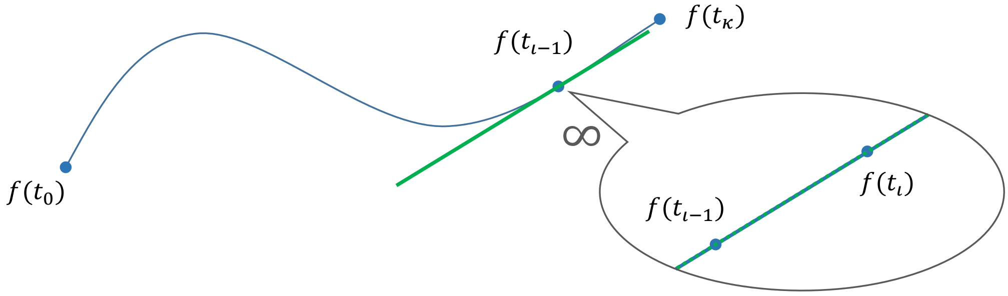

Abbildung 2: Kurve, Sehne und Tangente unter infiniter Vergößerung

Satz 1 bestätigt Leibniz' Vorstellung einer Kurve als Polygonzug mit infinitesimalen Seiten für stetig differenzierbare Standardkurven. Kurve und Polygonzug unterscheiden sich zwar, aber der Unterschied ist für die reelle Analysis unerheblich.

Zugleich rechtfertigt Satz 1 für stetig differenzierbare reelle Kurven die Technik der infiniten Vergrößerung, wie sie in Wunderling u. a. 1997 und Wunderling u. a. 2013 und Baumann und Kirski 2019 zur Veranschaulichung infinitesimaler Verhältnisse verwendet wird.

Bei einem Nichtstandard-Einstieg in die Analysis kann die Länge einer Kurve – ganz im Geiste der Leibniz'schen Vorstellung – als Standardteil einer hyperendlichen Summe, der Länge eines Polygonzugs mit infinitesimalen Seiten, eingeführt werden.

Eine reelle Kurve $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist *rektifizierbar* und hat die Länge L, wenn für die kanonische Fortsetzung von f und für jede infinitesimale Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{\kappa-1} < t_\kappa = b$ der Standardteil von $\sum_{\iota=1}^{\kappa} \|f(t_\iota) - f(t_{\iota-1})\|$ existiert und gleich L ist.

Im vorliegenden Aufsatz ist die Längenformel (2) für stetig differenzierbare reelle Kurven eher ein Nebenergebnis, denn im Vordergrund steht die Rechtfertigung der infiniten Vergrößerungstechnik, also der „Beobachtung" eines infinitesimalen Bildausschnitts und damit der Vergleich von infinitesimalen Kurvenstücken und Sehnen bezüglich Länge und Winkel. Daher muss die allgemeinere Längendefinition (Integraldarstellung) für interne hyperreelle Kurven herangezogen werden, auch wenn in Satz 1 nur Standardkurven (also kanonische Fortsetzungen reeller Kurven) betrachtet werden.

4 Die Grenzen der Vergrößerungstechnik

Dass die infinite Vergrößerung sehr wohl täuschen kann, wenn die Kurve differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist, zeigt das folgende Beispiel. Die betrachtete Kurve sei der Graph der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

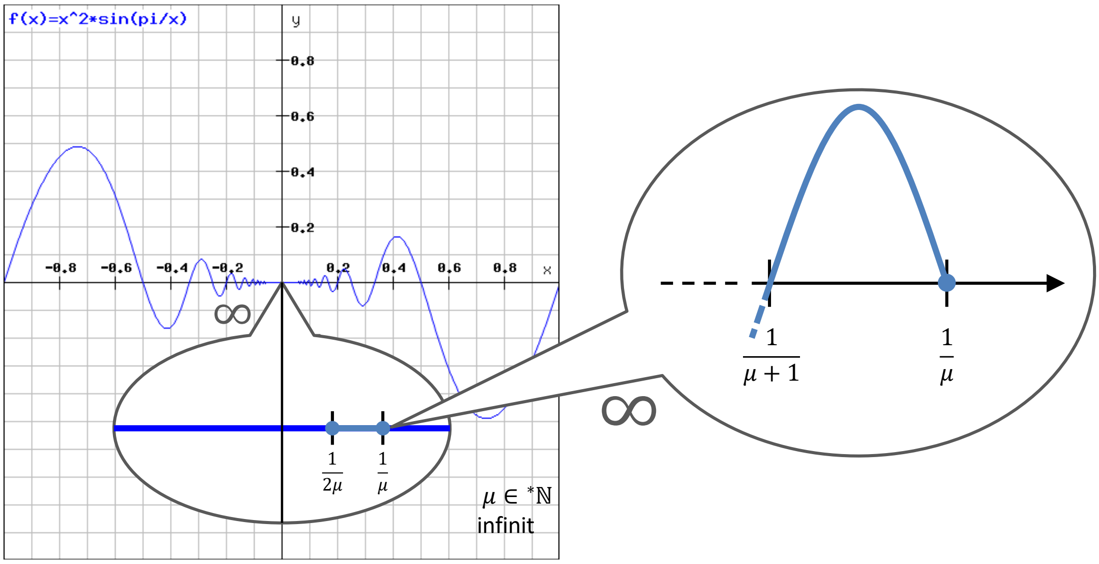

Abbildung 3: Der Funktionsgraph von f in einem infinitesimalen Intervall um 0

f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, aber f' ist in 0 nicht stetig. Für $x \neq 0$ ist $f'(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x}$ und an der Stelle 0 gilt

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(h \sin \frac{\pi}{h} \right) = 0.$$

Damit ist auch die Kurve $x \mapsto (x, f(x))$ in $(0,0)$ nicht stetig differenzierbar.

f hat die Nullstellen $\frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und jeweils zwischen $\frac{1}{n+1}$ und $\frac{1}{n}$ ein lokales Minimum bzw. Maximum, dessen Betrag zwischen $\frac{1}{(n+1)^2}$ und $\frac{1}{n^2}$ liegt.

Eine Abschätzung[2] für das Intervall von $\frac{1}{2m}$ bis $\frac{1}{m}$ zeigt: Der relative Längenüberschuss des Graphen gegenüber dem Intervall der Länge $\frac{1}{2m}$ ist $\geq 1 - \frac{2}{m+1}$.

Alle Überlegungen übertragen sich auf die hyperreelle Fortsetzung von f. Bei unendlichfacher Vergrößerung mit dem hypernatürlichen Faktor μ an der Stelle 0 sind der Funktionsgraph und die x-Achse (als Tangente) nicht zu unterscheiden (siehe Abbildung 3). Die Ausschläge des Graphen sind von der Größenordnung x^2 und verschwinden in der Darstellung. Der relative Längenüberschuss des Graphen gegenüber dem Intervall ist aber $\geq 1 - \frac{2}{\mu+1}$ und damit nicht infinitesimal.

Die Nullstellen sind unendlich gedrängt und in der Darstellung nicht zu unterscheiden, denn der Abstand zwischen $\frac{1}{\mu+1}$ und $\frac{1}{\mu}$ ist infinitesimal relativ zu $\frac{1}{\mu}$.

Auch der Winkel zwischen x-Achse und Funktionsgraph ist im Allgemeinen nicht infinitesimal, sondern schwankt mit $f'(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x}$ zwischen nicht infinitesimalen positiven und negativen Werten. In einer infinitesimalen Umgebung von 0 unterscheiden sich also die Kurventangenten erheblich, obwohl bei infiniter Vergrößerung zeichnerisch kein Unterschied zwischen Kurve und x-Achse auszumachen ist.

2. Details siehe Kuhlemann 2018

5 Fazit

Das Eingangsbeispiel aus Abbildung 1 stellt sich unter Verwendung von Satz 1 folgendermaßen dar. Der Winkel im Punkt Q beträgt $x+d\varphi$ mit $d\varphi \simeq 0$ und der infinitesimale Kreisbogen von P bis Q hat die Länge $dx = |PQ| + d\xi$ mit $\frac{d\xi}{dx} \simeq 0$. Aufgrund der Stetigkeit des Kosinus ist dann (für reelles x)

$$\cos x \simeq \cos(x+d\varphi) = \frac{dy}{|PQ|} = \frac{dy}{dx - d\xi} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{1 - \frac{d\xi}{dx}} \simeq \frac{dy}{dx}$$

und daher $\cos x = \mathrm{st}(\frac{dy}{dx})$ die gesuchte Ableitung von $\sin x$.

Satz 1 ist nun für eine sehr allgemeine Klasse von Kurven, nämlich die der stetig differenzierbaren Kurven anwendbar.

Funktionen wie die in Abschnitt 4 betrachtete sind bewusst „pathologisch“ konstruiert, um den Unterschied zwischen Differenzierbarkeit und stetiger Differenzierbarkeit herauszuarbeiten, wobei dort nur die Stelle 0 problematisch ist.[3]

Die im Schulunterricht behandelten differenzierbaren Funktionen sind in aller Regel auch stetig differenzierbar. Ihre Graphen sind reguläre Kurven. Daher kann man sie, wie von Leibniz angeregt, ohne Verlust als Polygonzüge mit infinitesimalen Seiten ansehen. Die infinite Vergrößerung erweist sich dann als ein adäquates und starkes Hilfsmittel zur Veranschaulichung von Nichtstandardmethoden in der Analysis.

6 Ergänzungen zur Integralrechnung

Die bisherigen Untersuchungen richteten sich vornehmlich auf den Einsatz der infiniten Vergrößerung bei der Differentialrechnung. Dementsprechend ging es um Längen und Winkel. Die infinite Vergrößerung ist aber auch bei der Integralrechnung einsetzbar. Dort spielt der Vergleich von Flächen eine wesentliche Rolle, und die betrachteten Funktionen sind zwar in der Regel noch stetig, aber nicht mehr unbedingt differenzierbar.

In der Nichtstandardanalysis wird das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ einer reellen Funktion (deren Definitionsbereich das reelle Intervall $[a,b]$ umfasst) als Standardteil einer Riemanan'schen Summe (zu einer infinitesimalen Zerlegung von $[a,b]$) definiert, anschaulich also als Standardteil einer Rechteckflächensumme mit infinitesimal breiten Rechtecken. f ist über $[a,b]$ integrierbar, wenn der Standardteil existiert und unabhängig von der Riemann'schen Summe ist, also unabhängig von der infinitesimalen Zerlegung und von den gewählten Zwischenpunkten, an denen der Funktionswert (die Höhe der Rechteckstreifen) genommen wird.

Die Aussage von Satz 1 war im Wesentlichen, dass unter infiniter Vergrößerung die für die reelle Analysis vernachässigbaren Unterschiede unsichtbar werden. Kurve, Sehne und Tangente verschmelzen optisch zu einer einzigen Linie (wie in Abb. 2 dargestellt).

3. Ein analoges Beispiel einer pathologischen Funktion betrachtet auch Elschenbroich mit seiner Funktionenlupe. Man sieht dort, wie die Kräuselungen des Funktionsgraphen immer enger und flacher werden, bis dieser nicht mehr von der x-Achse zu unterscheiden ist.

Demgegenüber *sieht* man zwischen infinitesimal unterteilter Treppenfunktion und Funktionsgraph unter infiniter Vergrößerung im Allgemeinen einen deutlichen Unterschied. Bei integrierbaren Funktionen ist der Unterschied aber trotzdem unerheblich, das heißt, er wird durch den Übergang zum Standardteil „ausgebügelt“. Dies ist insbesondere bei stetigen Funktionen der Fall. Stetige Funktionen sind integrierbar.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein (eigentliches oder uneigentliches) Intervall mit mindestens zwei Punkten und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann kann man die zugehörige Integralfunktion $I_{f,a} : D \to \mathbb{R}$ definieren durch

$$I_{f,a}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Diese hat eine hyperreelle Fortsetzung $I_{f,a} : {}^*D \to {}^*\mathbb{R}$, mit der man Integrale auch für hyperreelle Integralgrenzen $\alpha, \beta \in {}^*D$ definieren kann:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx := I_{f,a}(\beta) - I_{f,a}(\alpha)$$

Die üblichen Rechen- und Vergleichsregeln gelten aufgrund des Transferprinzips auch für diese hyperreell begrenzten Integrale, zum Beispiel:

$$f(x) \leq g(x),\ \text{für } \alpha \leq x \leq \beta \quad \Rightarrow \quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx \tag{5}$$

Nach einem allgemeinen Satz über stetige Funktionen gilt für alle $a, b \in D$ mit $a < b$, dass f auf $[a, b]$ beschränkt ist und einen minimalen und einen maximalen Wert annimmt. Nach dem Transferprinzip gilt daher für alle $\alpha, \beta \in {}^*D$ mit $\alpha < \beta$, dass f auf $[\alpha, \beta]$ beschränkt ist und einen minimalen und einen maximalen Wert annimmt.[4]

Der folgende Satz vergleicht die unter infiniter Vergrößerung sichtbaren Flächenunterschiede für eine stetige Funktion f über einem Intervall $[\alpha, \beta]$ der Länge $\delta := \beta - \alpha \simeq 0$, genauer, den Flächenunterschied zwischen der *Rechtecknäherung* $R(x) := f(x) \cdot \delta$ (für ein beliebiges $x \in [\alpha, \beta]$) bzw. der *Trapeznäherung* $T := \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(\beta)) \cdot \delta$ und dem Integral $I := \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$. Die Aussage des Satzes ist, dass der Unterschied jeweils infinitesimal relativ zu δ ist.

Satz 2. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f : [a, b] \to {}^*\mathbb{R}$ die hyperreelle Fortsetzung von f. Seien weiterhin hyperreelle $\alpha, \beta \in [a, b]$ mit $\alpha < \beta$ und $\delta := \beta - \alpha \simeq 0$ gegeben und $R(x)$, T und I wie oben definiert. Dann gilt:*

1. $\frac{R(x)-I}{\delta} \simeq 0$, *für alle* $x \in [\alpha, \beta]$,
2. $\frac{T-I}{\delta} \simeq 0$.

4. Das Transferprinzip ist hier anwendbar, weil die Aussage in der Prädikatenlogik erster Stufe formulierbar ist (wenn die Sprache für alle reellen Funktionen und Mengen, allgemeiner für alle ein- oder mehrstelligen Relationen über $\mathbb{R}$, Konstanten enthält), wobei die Konstanten beim Transfer jeweils durch die hyperreellen Fortsetzungen zu interpretieren sind. Dass die Variablen a, b in α, β umbenannt wurden, soll verdeutlichen, dass der Laufbereich nun die hyperreellen Zahlen sind.

Beweis. Zunächst überlegt man sich, dass für beliebige infinitesimal benachbarte Argumente auch ihre Funktionswerte infinitesimal benachbart sind (dies wird auch als *gleichmäßige Stetigkeit* bezeichnet): Für alle x mit $a \leq x \leq b$ folgt durch Übergang zum Standardteil (und weil a und b reell sind)

$$a = \mathrm{st}(a) \leq \mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(b) = b$$

Daher liegen für $x, x' \in [a, b]$ auch die jeweiligen Standardteile in $[a, b]$. Wenn $x \simeq x'$ ist, sind ihre Standardteile gleich. Da f stetig ist, folgt daraus

$$f(x) \simeq f(\mathrm{st}(x)) = f(\mathrm{st}(x')) \simeq f(x')$$

Daher gilt für alle $x, x' \in [a, b]$

$$x \simeq x' \Rightarrow f(x) \simeq f(x') \tag{6}$$

Zu 1: f nehme auf $[\alpha, \beta]$ den minimalen Wert $\check{y}$ bei $\check{x}$ und den maximalen Wert $\hat{y}$ bei $\hat{x}$ an. Für alle $x \in [\alpha, \beta]$ gilt also

$$\check{y} \leq f(x) \leq \hat{y} \tag{7}$$

Wegen $\check{x} \simeq \hat{x}$ folgt mit (6) $\check{y} \simeq \hat{y}$, also $\varepsilon := \hat{y} - \check{y} \simeq 0$. Aus (5) und (7) folgt

$$\int_\alpha^\beta \check{y}\, dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq \int_\alpha^\beta \hat{y}\, dx$$

also

$$\check{y}\delta \leq I \leq \hat{y}\delta \tag{8}$$

Außerdem folgt aus (7) (durch Multipliktion mit δ)

$$\check{y}\delta \leq R(x) \leq \hat{y}\delta \tag{9}$$

für alle $x \in [\alpha, \beta]$. Nun ist einerseits

$$I - R(x) \overset{(8)}{\leq} \hat{y}\delta - R(x) \overset{(9)}{\leq} \hat{y}\delta - \check{y}\delta = \varepsilon\delta \tag{10}$$

und andererseits

$$R(x) - I \overset{(9)}{\leq} \hat{y}\delta - I \overset{(8)}{\leq} \hat{y}\delta - \check{y}\delta = \varepsilon\delta \tag{11}$$

insgesamt also

$$|R(x) - I| \leq \varepsilon\delta. \tag{12}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Zu 2: Falls $f(\alpha) \leq f(\beta)$, ist

$$\check{y}\delta \leq f(\alpha)\delta \leq \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(\beta))\delta \leq f(\beta)\delta \leq \hat{y}\delta$$

Falls $f(\beta) \leq f(\alpha)$, schließt man analog mit vertauschten Rollen von α und β. In jedem Fall gilt also

$$\check{y}\delta \leq T \leq \hat{y}\delta \tag{13}$$

Mit T anstelle von $R(x)$ und (13) anstelle von (9) kann man jetzt analog zu (10) und (11) schließen und erhält

$$|T - I| \leq \varepsilon\delta. \tag{14}$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Die Ungleichung (9) zeigt, dass sich die Abweichung einer Rechtecknäherung von der exakten Fläche in einen „infinitesimalen Kasten“ der Breite δ und der Höhe ε einschließen lässt. Daher ist der Flächenunterschied auch relativ zur infinitesimalen Kastenbreite δ noch infinitesimal. Dies wird zum Beispiel beim Beweis des Hauptsatzes eingesetzt.

Betrachtet man die stetige Funktion f nicht nur über einem einzelnen infinitesimalen Intervall, sondern über n infinitesimalen Intervallen (wobei n eine hypernatürliche Zahl ist), so kann man das Argument des infinitesimalen Kastens für jedes der Intervalle einsetzen. Wird zum Beispiel das reelle Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle $I_1, \ldots, I_n$ der Länge $\delta := \frac{b-a}{n}$ zerlegt, so gibt es in jedem Teilintervall I_i einen maximalen Funktionswert $\hat{y}_i$ und einen minimalen Funktionswert $\check{y}_i$, und die Differenz $\varepsilon_i := \hat{y}_i - \check{y}_i$ ist jeweils infinitesimal. Für die Integralberechnung ist nun entscheidend, dass es unter den n Zahlen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ eine maximale Zahl ε gibt (die dann immer noch infinitesimal ist). Dies gilt für natürliche n und nach dem Transferprinzip dann auch für hypernatürliche n.[5] Damit kann man Abweichungen, die über dem Teilintervall I_i kleiner oder gleich $\varepsilon_i\delta$ sind, in der Summe abschätzen durch

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\delta \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\delta = n\varepsilon\delta = \varepsilon(b-a) \simeq 0.$$

Die meisten in der Schulpraxis vorkommenden Funktionen sind sind nicht nur stetig, sondern sogar differenzierbar, das heißt, sie sehen unter infiniter Vergrößerung gerade aus. Daher scheinen Trapeznäherungen, im Gegensatz zu Rechtecknäherungen, perfekt zu passen. Tatsächlich bleibt aber auch dort im Allgemeinen ein (unsichtbarer) infinitesimaler Unterschied bestehen. Rechtecknäherungen sind für konkrete Integralbrechnungen einfacher und haben mathematisch keinen Nachteil gegenüber Trapeznäherungen, denn die Flächenunterschiede bleiben in beiden Fällen, selbst wenn man sie hyperendlich über eine infinitesimale Zerlegung eines reellen Intervalls aufsummiert, noch infinitesimal.

Für stetige, aber nicht differenzierbare Funktionen ist eine optisch perfekte Annäherung mit Trapezen im Allgemeinen gar nicht möglich, wie die folgenden Beispiele zeigen. Das Argument des infinitesimalen Kastens bleibt aber wegen der Stetigkeit gültig.

5. Das Transferprinzip ist anwendbar, weil die Existenz des Maximums in der Prädikatenlogik erster Stufe formulierbar ist (vgl. Fußnote 4).

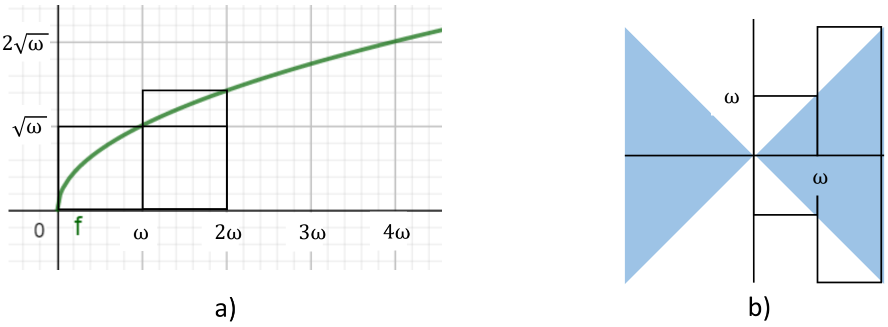

Abbildung 4: Zwei Beispiele stetiger, in 0 nicht differenzierbarer Funktionen.

Beispiel 1: $f(x) = \sqrt{x}$, für $x \geq 0$, ist auf dem gesamten Definitionsbereich stetig (und damit integrierbar), aber in 0 nicht differenzierbar. Eine infinite Vergrößerung an der Stelle 0 würde einen (augenscheinlich) senkrechten Ausschnitt des Funktionsgraphen zeigen. Die Rechteckflächen würden gleichsam nach oben „aus dem Bild schießen“. Um sie sichtbar zu machen, muss auf der y-Achse umskaliert werden, zum Beispiel mit $\sqrt{\omega}$ als Einheit (wenn ω die infinitesimale Einheit auf der x-Achse ist). Dann sieht der vergrößerte Funktionsgraph wieder wie eine gewöhnliche Parabel aus (siehe Abb. 4 a).

Beispiel 2:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

f ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig (und damit integrierbar), aber in 0 nicht differenzierbar. Hier führt die infinte Vergrößerung an der Stelle 0 dazu, dass der Funktionsgraph nicht mehr als Linie erkennbar ist, da die Nullstellen $\frac{1}{\mu}$ $(\mu \in {}^*\mathbb{N}, \mu \gg 1)$, die im Vergrößerungsfenster liegen, nicht mehr aufgelöst werden können, denn der Abstand zweier benachbarter Nullstellen ist infinitesimal relativ zur infinitesimalen Einheit auf der x-Achse. Dennoch ist die Schwankungsbreite der Funktionswerte leicht ablesbar, sodass die minimalen und maximalen Rechtecknäherungen am Graphen eingezeichnet werden können (siehe Abb. 4 b).

Literaturverzeichnis

Baumann, Peter, und Thomas Kirski. 2019. *Infinitesimalrechnung.* Springer Spektrum.

Bedürftig, Thomas. 2018. Über die Grundproblematik der Grenzwerte. *Mathematische Semesterberichte* 65 (2): 277–298.

Elschenbroich, Hans-Jürgen. 2015. FUNKTIONENLUPE.de. Besucht am 20. September 2019. `http://www.funktionenlupe.de/`.

Elschenbroich, Hans-Jürgen, Günter Seebach und Reinhard Schmidt. 2014. Die digitale Funktionenlupe. Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. *mathematik lehren* 187.

Keisler, H. Jerome. 2000. *Elementary Calculus – An Infinitesimal Approach.* 2. Aufl. University of Wisconsin.

Kirsch, Arnold. 1979. Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. *Der Mathematikunterricht* 25 (3): 25–41.

Kuhlemann, Karl. 2018. Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung. In *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik,* herausgegeben von Ralf Krömer und Gregor Nickel, Bd. 10.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. 2016. *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae.* Herausgegeben von Eberhard Knobloch. Springer Spektrum.

Schmieden, Curt, und Detlef Laugwitz. 1958. Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. *Math. Zeitschr.* 69:1–39.

Wunderling, Helmut, u. a. 1997. Infinitesimalmathematik. *MU (Der Mathematikunterricht)* Heft 1.

Wunderling, Helmut, Peter Baumann, Angelika Keller und Thomas Kirski. 2013. *Analysis als Infinitesimalrechnung.* Berlin: DUDEN PAETEC.